„Zur Refraktion im Nivellement".

Von der

K. Technischen Hochschule München

zur Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften (Doktor-Ingenieurs) genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von

Diplomingenieur **Franz Kohlmüller**

Assistent an der K. Technischen Hochschule München.

Referent: Professor Dr. Max Schmidt

Korreferent: Professor Geh. Hofrat Ferdinand Loewe.

München 1912

Kgl. Hofbuchdruckerei Kastner & Callwey.

„Zur Refraktion im Nivellement“.

Von der

K. Technischen Hochschule München

zur Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften (Doktor-Ingenieurs) genehmigte Dissertation.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Vorgelegt von

Diplomingenieur **Franz Kohlmüller**

Assistent an der K. Technischen Hochschule München.

Referent: Professor Dr. **Max Schmidt**

Korreferent: Professor Geh. Hofrat **Ferdinand Loewe**.

München 1912

Kgl. Hofbuchdruckerei Kastner & Callwey.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546317_0036

„Meinen lieben Eltern!“

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Abschnitt I: Einleitung 7

Abschnitt II: Refraktionstheorie von Lallemand; Erprobung derselben durch Versuchsbeobachtungen und deren Ergebnis. Refraktionseinfluss: a) bei einzelnen Zielungen, b) bei Höhenunterschieden (Asymmetrie der Lichtkurven). Richtigkeit und Verwendbarkeit der Lallemand'schen Refraktionsformel. 9

Abschnitt III: Refraktionstheorie von Jordan; angewendet auf die Beobachtungsergebnisse; zeigt analog der Lallemand'schen Formel keine genügende Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung. Jordan's Vorschlag, die Temperaturänderung mit der Höhe zu beobachten und in Rechnung zu ziehen. Messung zweier Temperaturen (am Boden und in 1 m Höhe) durch Hugershoff ausgeführt, der eine neue Refraktionsformel ableitet. Erweiterung derselben seitens des Verfassers durch Beobachtung dreier Temperaturen; Vergleich der in einem praktischen Falle mit den beiden Temperaturgesetzen a) mit 2, b) mit 3 Temperaturen erhaltenen Ergebnisse; Vorschlag zur Aufsuchung eines neuen Temperaturgesetzes. 32

Abschnitt IV: Bedeutung der Zielhöhe und der Temperatur für die Refraktionswirkung. Diesbezügliche Feldbeobachtungen an einem warmen und kalten Tag nebst deren Ergebnis. 45

1. Graphische Darstellung und Diskussion der Lichtkurven, die nach den Tageszeiten ausgeschieden werden. Abhängigkeit dieser Kurven von Zielhöhe und Zielweite.
2. A. Betrachtung über die Beziehungen des Refraktionsfehlers zur Temperatur; Ausscheidung der Kurven nach Zielhöhen.
   B. Betrachtung über die Beziehungen des Refraktionsfehlers zur Zielhöhe; Ausscheidung der Kurven nach den Temperaturen.
3. Kurvenbilder für den Refraktionseinfluss auf einzelne Zielhöhen, ausgedrückt durch dessen Abhängigkeit von Temperatur und gleichzeitig Zielhöhe; dabei Ausscheidung der Kurven nach den Millimeterbeträgen der Refraktionsfehler.
4. Die analoge Betrachtung wie in 3 wird hier auf zwei ungleiche Höhenunterschiede in drei verschiedenen Höhenlagen ausgedehnt.

Abschnitt V: Ableitung der nivellitischen Refraktionskoeffizienten für alle Beobachtungsreihen an den drei Tagen und Vergleich derselben mit terrestrischer Refraktion. Dabei als Ergebnis erhalten, dass die Refraktion im Nivellement sich sowohl inbezug auf die Zeit der Maxima und Minima wie auch hinsichtlich der Fehlergrösse und des Temperaturgradienten wesentlich von der Strahlenbrechung in der freien Atmosphäre unterscheidet. Betrachtung der beim Nivellement stattfindenden Beziehungen zwischen Refraktionskoeffizient k, Temperatur t und Temperaturgradient n. 83

Abschnitt VI: Schluss und Verzeichnis der benützten Literatur . . 101

I. Einleitung.

Wie bei allen wichtigeren geodätischen Massnahmen war man auch beim Nivellieren von jeher bestrebt, zwecks Erzielung möglichst guter und sicherer Beobachtungsergebnisse die Genauigkeit in der Beobachtung immer mehr zu steigern. Insbesondere trifft dies zu für die sogenannten Fein- oder Präzisionsnivellements, wie solche auch seit bereits mehreren Jahrzehnten einen wesentlichen Teil des Arbeitsprogramms der internationalen Erdmessung bilden.

Die beabsichtigte Genauigkeitssteigerung beim Nivellement lässt sich nun in erster Linie erreichen durch weiteren Ausbau der hiefür in Betracht kommenden Instrumente sowie durch möglichste Verbesserung der Beobachtungsmethoden. Neben diesen Vervollkommnungsbestrebungen positiver Art sind aber wohl von Bedeutung auch jene in entgegengesetzter Richtung sich erstreckenden Versuche, konstante Fehlereinflüsse beim Nivellement als wirksam aufzudecken, ihre Bedeutung zu erforschen und sie so weit als möglich durch eine geeignete Beobachtungsmethode bezw. rechnerische Berücksichtigung unschädlich zu machen.

Dass solche Fehlereinflüsse systematischer Art im Nivellement stattfinden, ist eine bekannte Erfahrungstatsache; trotz sorgfältiger Punktversicherung, peinlicher Instrumentenberichtigung und Lattenuntersuchung, ferner ungeachtet der Wahl von vermeintlich nur günstigem Wetter sowie überhaupt grösster Sorgfalt beim Beobachten können doch manche Nivellements eine gewisse, über den Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler hinausgehende Unsicherheit in sich schliessen, deren Auftreten nur durch Annahme einer Einwirkung von konstanten Fehlerursachen erklärbar ist.

Als solche einseitig wirkende Fehlereinflüsse — allgemein mit „systematischem Nivellierfehler" bezeichnet — wurden nun bisher eine Reihe von Fehlermöglichkeiten, wie Restfehler in der Instrumentenberichtigung, Teilwertsänderungen der Libelle bei Temperaturschwankungen, Teilungsfehler der Latten, Einsinken des Stativs und der Latten, Witterungsverhältnisse u. dergl. angenommen, die, wenn auch zweifellos systematischer Art, doch meist in nicht genügendem Masse die mitunter verhältnismässig beträchtlichen Differenzen bei Wiederholungen von Nivellements, insbesondere solchen auf geneigten Strecken im hügeligen Gelände erklären lassen. Denn bei

näherer Betrachtung dieser Fehlerursachen wird man finden, dass dieselben zum grössten Teile durch entsprechende Massnahmen, wenn auch nicht ganz beseitigt, so doch möglichst unschädlich gemacht werden können.

Während es z. B. gelingt, den Einfluss von Restfehlern in der Instrumentenberichtigung durch Verwendung gleicher Zielweiten im Rück- und Vorblick auszuscheiden, wird man den bei grösseren Temperaturschwankungen erfolgenden Teilwertsänderungen dadurch zu begegnen suchen, dass die Libellenausschläge überhaupt nur klein gewählt werden. Auch der durch Aenderung des Lattenmeters bewirkte Fehlereinfluss kann bei genügend oft zu wiederholender Untersuchung der Latten ausgeschaltet werden, wie andererseits durch besonderes Festschlagen der Fussplatten auf dem Boden mittels eines Hammers oder, falls notwendig, durch Verpflockung der Wechselpunkte es sich erreichen lässt, das meist übertrieben gefürchtete Einsinken des Stativs und der Latten tunlichst hintanzuhalten.

Im Gegensatz zu diesen eben genannten systematischen Fehlerursachen fällt es aber schwer, einen eventuell konstanten Fehlereinfluss der Witterungsverhältnisse, überhaupt der meteorologischen Elemente, wie Wind, Luftdruck, Temperatur und Feuchtigkeit in einfacher Weise zu kompensieren. Ist man auch bestrebt, nur bei günstigem Wetter, also bei „Windstille und bedecktem Himmel" zu nivellieren, so wird solche Witterung wenigstens auf die Dauer nur selten zur Verfügung stehen. Vielmehr wird man insbesondere bei grösseren Nivellements gezwungen sein, die Nivellementsarbeit bei jeder annehmbaren, trockenen Witterung durchzuführen. Bei Sonnenschein ist es nun notwendig, zwecks Verminderung des Zitterns der Lattenbilder kleinere Zielweiten zu verwenden, was aber, da sich hiedurch die Anzahl der Instrumentenstände vermehrt, einen bisweilen nicht unwesentlichen Mehraufwand an Arbeit bedeutet. Hievon abgesehen, bewirken grössere Temperaturschwankungen im Laufe des Tages Veränderungen in der Blasenlänge und damit Teilwertsänderungen, deren Einfluss auf die Neigungsmessung der Ziellinie zwar abgeschwächt, aber doch nicht gänzlich ausgeschaltet werden kann. Andererseits vermag einseitige Sonnenbestrahlung der Stativbeine wie trotz Schirmschutz gelegentlich auch einzelner Instrumententeile — beim Tragen des Instruments von Stand zu Stand wohl vorkommend — das Auftreten von Spannungen in der Verbindung der Libelle mit dem Fernrohr zu bewirken, die ebenfalls in der Lage sind, schädliche Einflüsse systematischer Art auszuüben.

Dazu kommt, dass bei selbst nur schwachem Sonnenschein die Zeit auf einem Instrumentenstand sich bisweilen in die Länge ziehen kann, weil die sichere Einstellung auf die Latte oder auch die Schätzung an derselben infolge

langsamer Auf- und Abwärtsbewegung des Lattenbildes bedeutend erschwert wird. Diese auf Refraktionswirkung beruhende Erscheinung konnte Verfasser bei dem im vergangenen Herbst 1911 ausgeführten Präzisionsnivellement Traunstein—Garching[1]) wiederholt und zwar in der Regel dann beobachten, wenn in der Nivellementsstrecke ein Uebergang von freier, annähernd gleichmässig von der Sonne bestrahlter Gegend in einen abgeschlossenen Wald mit niederer Temperatur und grösserem Feuchtigkeitsgehalt erfolgte. Neben dieser bereits auf horizontalem Gelände infolge der gewöhnlichen Refraktionswirkung statthabenden Unsicherheit im Nivellement wird aber bei geneigtem Gelände ausserdem von grosser Bedeutung die sogenannte Asymmetrie der Lichtkurve im Vor- und Rückblick, die darin begründet ist, dass bei Steigung bezw. Gefälle der Lichtstrahl in den beiden Blicken verschieden dichte Luftschichten zu durchdringen hat.

Aus dieser vorstehenden, nur kurzen Zusammenfassung der beim Nivellement überhaupt möglichen, systematischen Fehlereinflüsse ergibt sich, dass es in erster Linie die meteorologischen Elemente sind, die solche konstante Unsicherheiten zu bewirken vermögen. Um diese systematischen Fehlerursachen weiter aufzuklären, stellte Verfasser mehrere Feldbeobachtungen an. Bevor jedoch auf deren Ergebnis näher eingegangen werden kann, ist es zweckmässig, einen allgemeinen Ueberblick über die bisher aufgestellten, speziell für das Nivellement giltigen Refraktionstheorien zu geben; soweit aber ausgeführte Beobachtungen hierauf Bezug haben, sollen dieselben gleich im Zusammenhang damit behandelt werden.

II. Refraktionstheorie von Lallemand.

Wohl als erster, der eine wissenschaftliche Theorie über die Refraktionswirkung im Nivellement aufgestellt hat, ist Lallemand zu betrachten. In seiner interessanten „Note sur l'erreur de réfraction dans le nivéllement géométrique“[2]) führt er inbezug auf den wichtigsten Punkt seiner Abhandlung, nämlich den Einfluss der Wärmeverhältnisse, in der Hauptsache folgendes aus:

„Während die Temperatur in hohen Regionen der Atmosphäre im wesentlichen als konstant angenommen werden kann, findet bei den unteren Schichten

[1]) Präzisionsnivellement der 34 km langen Eisenbahnstrecke Traunstein—Garching, für die Eisenbahndirektion München ausgeführt im Auftrage des Geodätischen Instituts der Technischen Hochschule München.

[2]) Erdmessungsbericht, Jahrgang 1897, Annexe B III d.

eine fortwährende Aenderung derselben statt. Dieses beständige Schwanken der Temperatur wird hier durch die Nähe des Bodens bewirkt, welch' letzterer sich durch die Sonnenstrahlung erwärmt und infolge der Ausstrahlung wieder abkühlt. Es wird der Fall betrachtet, dass z. B. allgemein im Sommer der Boden wärmer ist als die Luft. Dadurch, dass er seine Wärme den benachbarten Luftteilchen mitteilt, erheben sich diese infolge ihrer verminderten Dichte unter Erzeugung von Luftströmen und bewirken so einen langsamen Ausgleich der mit der Höhe wechselnden Temperatur. Dabei zeigt sich das bekannte Flimmern der Bilder, womit aber wenig Refraktion[3]) verbunden ist. Falls aber der Boden kälter ist als die darüber befindlichen Luftschichten, wie meist morgens nach einer klaren Nacht, so sind diese Luftmassen als gleichgelagert mit nach oben abnehmender Dichtigkeit und ohne wesentliche Störung ihres Gleichgewichts anzunehmen, weshalb hier der Wärmeübergang von Schicht zu Schicht nur durch Leitung erfolgen kann. Dieser Zustand der Atmosphäre bildet dann die günstigste Bedingung für das Auftreten der Refraktion."

Auf Grund von in den 60er Jahren des verflossenen Jahrhunderts ausgeführten Beobachtungen von Marcet in Genf und Goulier in Paris, wonach im wesentlichen eine Abnahme der Lufttemperatur in arithmetischer Progression für eine Höhenänderung über dem Boden in geometrischer

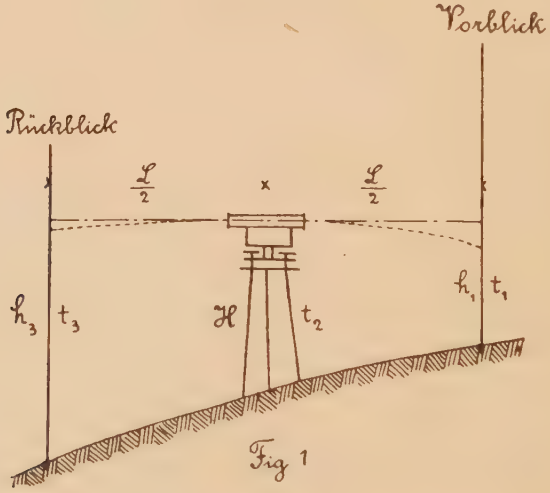


Fig 1

[3]) Diese Annahme ist als unrichtig zu bezeichnen; denn, wie Verfasser bei seinen Beobachtungen fand, treten gerade mit dem Flimmern der Bilder vormittags und insbesondere zu Mittag die bedeutendsten Refraktionseinflüsse auf; s. hierüber Abschnitt V.

Reihe statthaben soll, nimmt Lallemand zur Berechnung des Refraktionseinflusses als Funktion der Lufttemperatur t in der Höhe h über dem Boden folgende Beziehung an:

$$t = a + b \cdot \lg(h + c) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1]$$

Hierin bedeuten a, b und c drei Konstante, die für jeden Instrumentenstand mittels 3 Temperaturbeobachtungen $t_1\ t_2\ t_3$ in den bestimmten Höhen h_1 (= Zielhöhe im Vorblick), H (= Höhe der Visierlinie am Instrumentenstandort) und h_3 (= Zielhöhe im Rückblick) jeweils besonders zu bestimmen sind.

Ferner ist b bei mit der Höhe wachsender Temperatur positiv, bei abnehmender Temperatur negativ, während c stets positiv gewählt werden muss.

Dadurch, dass die Lufttemperatur also an 3 Hauptpunkten der Lichtkurve, nämlich in deren Mitte und an den beiden Enden wirklich bestimmt wird, ist die Annahme berechtigt, dass die gewählte Temperaturfunktion in 1] wenigstens näherungsweise auch für die übrigen Punkte der Lichtkurve Geltung haben möge.

Unter Zugrundelegung des in 1] angenommenen Temperaturgesetzes kommt nun Lallemand nach einer längeren Ableitung zu folgendem Ausdruck für den vom Refraktionseinfluss herrührenden Fehler E des Nivellements einer Strecke L.

$$E^{mm} = -0{,}00108 \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{t_3 - t_1}{(1 + \alpha\, t)^2} \cdot \frac{L^2}{D} \cdot \gamma\,(\delta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2]$$

$$\text{wobei } \gamma\,(\delta) = \frac{1 - \frac{1}{2}\, l\,(1 - \delta^2)}{l\,\frac{1+\delta}{1-\delta}} - \frac{1}{2\,\delta} \text{ und } \delta = \frac{D}{2(H + c)};$$

hierin bedeuten: $\frac{L}{2}$ = gleiche Zielweite für Vor- und Rückblick

h_1 = Lattenablesung vorwärts mit Temperatur t_1

h_3 = Lattenablesung rückwärts mit Temperatur t_3

H = Instrumentenhöhe mit Temperatur t_2, und

$D = h_3 - h_1$ = nivellierter Höhenunterschied.

Ferner sind: t = Mittelwert aus $t_1\ t_2\ t_3$, B bedeutet den Luftdruck, $\alpha = 0{,}003665$ = Ausdehnungskoeffizient der Luft, während l natürliche Logarithmen darstellen. Die Hilfsgrösse δ steht dabei mit dem Temperaturgefälle τ in folgender Beziehung:

$$\tau = \frac{l\,(1 + \delta)}{l\,(1 - \delta)} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}, \text{ wobei } \tau \text{ stets positiv zu wählen ist.}$$

Hat man nun τ aus den drei beobachteten Temperaturen bestimmt, so lässt sich das zugehörige δ aus der letzten Gleichung berechnen und durch weitere Substitution auch das gesuchte E finden.

Trotzdem nun Lallemand zur Vereinfachung der nicht geringen Rechenarbeit für die Funktionen von δ und γ (δ) besondere Diagrammkurven[4]) aufgestellt hat, bleibt die praktische Verwertung der Formel 2] für E immer noch eine komplizierte Arbeit. Jordan hat daher versucht,[5]) obigen Ausdruck für E zu vereinfachen. In der Voraussetzung einer mit der Höhe gleichmässig ab- und zunehmenden Temperatur — die für die Bodennähe allerdings nur näherungsweise angenommen werden darf — gelangt er zu dem Schlusse, dass $\tau = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$ im allgemeinen dem Normalwerte = 1 entsprechen wird. Es ist daher gestattet, den Ausdruck $\tau = \frac{1\,(1+\delta)}{1\,(1-\delta)}$ in Potenzen von $(1-\delta)$ zu entwickeln und umgekehrt die δ unter Beschränkung auf die quadratischen Glieder wieder abzuleiten. Nach dieser Umformung erhält Jordan als Näherung erster bis zweiter Ordnung der komplizierten Lallemand'schen Refraktionstheorie:

$$E^{mm} = -0.00108 \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{t_3 - t_1}{(1+\alpha t)^2} \cdot \frac{L^2}{D} \cdot \left(\frac{(1-\tau)}{12} + \frac{(1-\tau)^2}{24} + \ldots\right) \ldots . \quad 3]$$

Betrachtet man diesen Ausdruck für den Refraktionseinfluss E, so ergibt sich, dass letzterer zunächst proportional ist dem Luftdruck B, wenngleich der Einfluss einer Luftdruckänderung auf E als verhältnismässig gering ausfällt; denn eine Druckänderung von 8—10 mm ändert E erst annähernd um 1% seines an und für sich nur kleinen Wertes. Weiters ist E proportional dem Totalgefälle zwischen der Temperatur im Vor- und Rückblick, wie auch dem Quadrat der nivellierten Strecke, bezw. der gewählten Zielweite. Dagegen soll die Mitteltemperatur t in allerdings nur geringem Masse den Wert von E umgekehrt proportional beeinflussen.[6])

Erscheint die Abhängigkeit des E von den soeben genannten Grössen ohne weiteres als mehr oder weniger plausibel, so muss es wohl beim ersten Blick schon auffallen, dass der aus der Asymmetrie der Lichtkurve resultierende Refraktionsfehler gemäss den Formeln 2] und 3] in umgekehrtem Verhältnis zum Höhenunterschied D stehen soll. Je kleiner also D wird, um so grösser müsste nach den Formeln das E werden. Tatsächlich tritt aber der Fehlereinfluss E doch nur bei Nivellements in geneigtem Gelände auf, während bei horizontalem Gelände, wo eben die Refraktionswirkungen

---

[4]) Siehe a. a. O. S. 260, Abaque, donnant l'erreur de réfraction dans le nivéllement géométrique.

[5]) Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1898, S. 97.

[6]) Den ganz unbedeutenden Einfluss der Feuchtigkeit auf die Refraktionsgrösse hat Lallemand (s. a. a. O. S. 248) völlig vernachlässigt; vergl. hiezu auch Helmert, Höhere Geodäsie, Bd. II, 1884, S. 575, und Christiansen, Zeitschr. für Vermessungswesen, 1903, S. 309.

im Vor- und Rückblick gleichwertig sind, und sich daher bei Bildung des Höhenunterschiedes $h_3 - h_1$ wieder aufheben müssen, überhaupt eine Asymmetrie der Lichtkurve nicht bemerkbar wird. Dieser scheinbare Widerspruch zwischen Formelausdruck und den natürlichen Verhältnissen verschwindet jedoch bei näherer Betrachtung des D gleichzeitig mit den Hilfsgrössen δ und τ.

Nach 1] ist $\delta = \frac{D}{2\,(H+c)}$, so dass bei $D = 0$ auch δ den Wert 0 annimmt.

Damit wird aber auch $\gamma\ (\delta)$ als Grenzwert gleich 0, während τ den Betrag 1 erreicht. Beim Einsetzen dieser Grössen $\gamma\ (\delta)$ in Gleichung 2] und τ in Gleichung 3] ergibt sich dann der Refraktionseinfluss E beidesmal zu Null, was mit den tatsächlichen Verhältnissen nunmehr übereinstimmt.

Ueber die praktische Verwertbarkeit der Lallemand'schen Refraktionstheorie schreibt Jordan in der Zeitschr. f. Vermessungsw. 1898, S. 102: „Was die praktische Verwendung solcher Theorien betrifft, so ist ja an die Einzelbestimmung dreier Temperaturen $t_1\, t_2\, t_3$ auf der Sichtlinie nicht zu denken; die Theorie kann zunächst nur den Wert haben, den physikalischen Zusammenhang zwischen dem Nivellementsfehler und den Temperaturverhältnissen zu erforschen und zu konstatieren, ob die Einflüsse messbar sind."

Dennoch hat es Verfasser versucht, durch mehrere auf einem hiezu geeigneten Gelände angestellte Feldbeobachtungen die praktische Verwendbarkeit der Lallemand'schen Theorie zu erproben. Es wurde zu diesem Zwecke auf einem gleichmässig geneigten Damm der Militärbahn in Moosach bei München ein Instrumentenstandort, Punkt 5 in der folgenden Skizze, gewählt

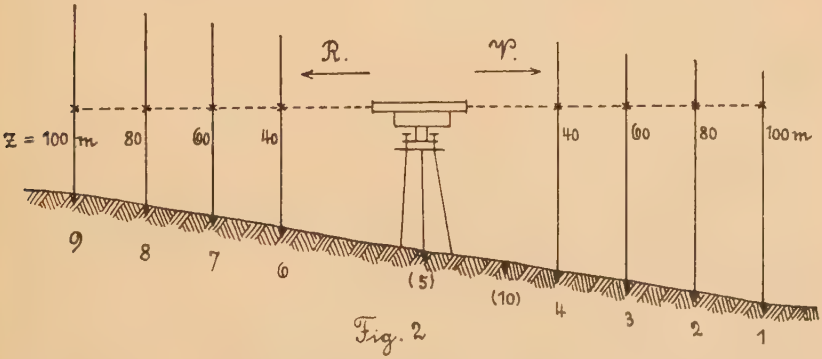


Fig. 2

und von diesem aus in 40, 60, 80 und 100 m Entfernung nach beiden Seiten hin, also Vor- und Rückblicke in gleicher Zielweite, dauerhafte Pflöcke mit besonders geschmiedeten Rundkopfnägeln fest in den Boden geschlagen. Von

diesem Instrumentenstandort 5 aus, der während der ganzen Tagesbeobachtung keine Veränderung erfuhr, wurden dann ca. alle 2 Stunden an den der Reihe nach auf allen Pflöcken aufgestellten Latten die Zielhöhen beobachtet. Die Reihenfolge war dabei derart, dass auf den Vorblick nach der in 40 m Entfernung befindlichen Latte sogleich der entsprechende Rückblick mit ebenfalls 40 m Zielweite erfolgte. Analog wurden auch für die übrigen, also in 60, 80 und 100 m Zielweite befindlichen Punkte die beiden zusammengehörigen Zielungen des Vor- und Rückblicks miteinander verbunden.

Zur Temperaturmessung brachte man an jeder Latte und zwar auf der einen Seitenleiste straff gespannte Leinenbänder mit geeigneten Klemmvorrichtungen an, welche es ermöglichten, die Thermometer in beliebiger Höhe über dem Lattenfuß zu befestigen. Um nun für jeden einzelnen Punkt die entsprechende konstante Höhenlage des Thermometers ein für allemal zu besitzen, wurden die verschiedenen Zielhöhen h_1 und h_3 durch ein einfaches Nivellement bestimmt und auf den Latten markiert.

Zur Beobachtung dienten zwei Seibt'sche Wendelatten [7]) des Geodätischen Instituts der Technischen Hochschule sowie ein ebenfalls demselben gehöriges Zeiss-Nivellierinstrument der grossen Art. Den Vorzug des Nivellierens mit Lattenablesung bei einspielender Libelle gegenüber dem Seibt'schen Verfahren findet Verfasser darin, dass gerade für diese Arbeit eine solche Beobachtungsmethode als notwendig und zweckmässig sich erwies, die neben dem Vorteil einer möglichst raschen Durchführung es gestattet, die durch die Temperatur bedingten Schwankungen in der Blasenlänge sowie eventuelle Teilwertsänderungen der Libelle gänzlich auszuscheiden. Letztere Bedingung aber lässt sich wohl am besten durch das Beobachten mit einspielender Libelle erfüllen, bei welchem Verfahren Blasenausschläge überhaupt nicht in Betracht kommen, so dass auch geringe Teilwertsänderungen ohne jeglichen Einfluss bleiben.

In besonderem Masse schien hiezu das neue Zeiss-Nivellierinstrument [8]) geeignet, das bekanntlich mittels eines besonderen Prismensystems das Einstellen der Libelle mit grosser Schärfe gestattet. Die Libelle besitzt hier keinerlei Teilung; vielmehr entwirft die Prismenkombination zwei vom Okular

---

[7]) Diese Präzisionslatten besitzen die Vergleichseinrichtung mit Invardraht nach M. Schmidt, die bekanntlich eine einfache und rasche Vergleichung über die Aenderung des Lattenmeters gestattet. Vergl. „Ergänzungsmessungen zum bayerischen Präzisionsnivellement", Heft 1, S. 30, bearbeitet von Professor Dr. Max Schmidt, München 1908.

[8]) Siehe Neue Nivellierinstrumente von H. Wild in Jena; Zeitschr. f. Instrumentenkd., 1909, Heft 11; hieraus wurde auch Skizze auf S. 15 entnommen.

aus sichtbare, sich einander berührende und gleichgerichtete Bilder von den Hälften der beiden Blasenenden, die, um die Libelle einzustellen, mittels der Kippschraube zur Koinzidenz zu bringen sind. Da bei dieser Art der Libellenbeobachtung einem Blasenausschlag stets ein doppelt so großer Abstand der Blasenbilder entspricht, wird auch die Beobachtungsgenauigkeit gegenüber der bisher üblichen, mittels einer Libellenskala vorgenommenen Einstellung der Blase auf das doppelte erhöht. Dies hat zur Folge, dass schon geringe

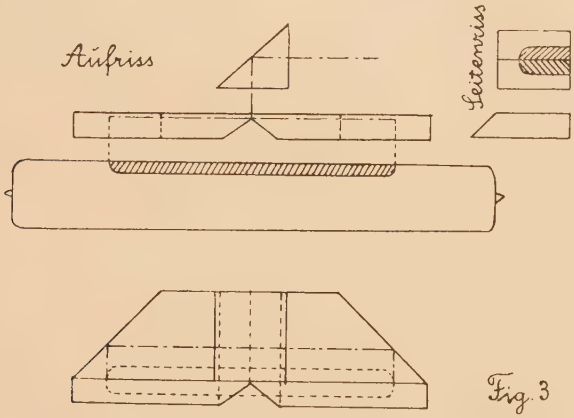


Fig. 3

Schwankungen in der Koinzidenzstellung der Blasenenden sich sofort scharf erkennen und berichtigen lassen. Von Vorteil ist, dass die Libellenbeobachtung dicht neben dem Okular erfolgt, weshalb die Beobachtung der Latte sich möglichst rasch mit dem Einstellen der Blase verbinden und prüfen lässt. Dabei kann, da die Blasenbilder von Parallaxe frei sind, das Auge der Höhe nach eine beliebige Lage einnehmen.[9]) Trotz der hiedurch erreichten Vorteile

---

[9]) Betreff weiterer, insbesondere optischer Vorzüge des Zeiss'schen Nivellierinstrumentes muss auf die bereits erwähnte Abhandlung Bezug genommen werden. Die Leistungsfähigkeit dieses Nivelliers wurde erprobt bei dem Präzisionsnivellement der Eisenbahnstrecke Freilassing—Reichenhall, das bereits zu Ostern 1911 seitens des Geodätischen Instituts der Kgl. Technischen Hochschule München für die Eisenbahndirektion München zur Ausführung kam.

Trotz der meist ungünstigen Witterungsverhältnisse des Frühjahrs konnte hiebei ein mittlerer Km-Fehler für das Doppelnivellement (aus Standfehlern berechnet) zu $\pm$ 0,8 mm erhalten werden.

Eine wohl wesentliche Vervollkommnung des Zeiss-Nivelliers bedeutet das von H. Wild in Jena in allerneuester Zeit auf optischem Wege gelöste Problem der vertikalen Parallelverschiebung des Lattenbildes. (Mit Rücksicht auf den zylindrischen Zapfen des Zeiss'schen Nivellierinstrumentes hatte Verfasser schon vorher eine mechanische Lösungsart dieser Idee in Anregung

einer völlig sicheren Libelleneinstellung und dadurch bedingten Horizontallegung der Ziellinie soll aber nicht in Abrede gestellt werden, dass bei dem eingeschlagenen Nivellierverfahren andererseits wieder die Schätzungsfehler an der Latte mit in Kauf zu nehmen sind. Bei Latten mit schmalen Teilungsfeldern, wie bei den 4 mm breiten Feldern der Seibt-Latten, dürfte jedoch der Einfluss der Schätzungsfehler wenigstens für einen geübteren Beobachter nicht so sehr ins Gewicht fallen gegenüber der Unsicherheit, die durch Beeinflussung der Libelle infolge grösserer Temperaturschwankungen erwächst.[10]) Dies wird insbesondere dann zutreffen, wenn, wie es hier notwendig war, an einem warmen Sommertag Beobachtungen zu allen Tagesstunden, also auch mittags bei hoher Temperatur, ausgeführt werden müssen.

Für die Temperaturmessung benützte ich drei empfindliche Thermometer mit Zehntelgrad-Teilung, von denen zwei an den beiden Latten, das dritte

---

gebracht, deren praktische Ausführung sich jedoch infolge der hiedurch bedingten grossen Anforderungen an die Feinheit der mechanischen Konstruktion nicht ermöglichen liess.)

Es wird hier ein vor dem Objektiv befindliches, ca. 1—2 cm dickes Planglas um eine horizontale Achse gedreht oder gekippt und dadurch eine in vertikaler Richtung erfolgende Parallelverschiebung des Lattenbildes bezw. der Ziellinie bewirkt. Mittels geeigneter Hebelübersetzung kann das Mass dieser Verschiebung bestimmt und auf diese Weise eine neue Nivelliermethode, nämlich mit einspielender Libelle und Einstellung des Fernrohrfadens auf die Lattenfeldmitte ausgeführt werden. Dieses Nivellierverfahren unterscheidet sich von der bisher schon mit dem Vogler'schen Kathetometer ausgeführten Nivelliermethode wohl dadurch, dass a) im Gegensatz zu dem komplizierter gebauten, grösseren und daher weniger handlichen Kathetometer hier ein verhältnismässig einfaches, leicht transportables Nivellierinstrument von ebenfalls grosser Genauigkeit zur Verwendung kommt, und dass b) hier wirklich ein Einstellen der Libelle stattfindet, während beim Kathetometer immer noch die wenn auch möglichst verringerten Ausschläge der Libelle abgelesen werden. Vergl. Zeitschr. f. Verm., 1902, S. 3. Verfasser hat diese neue optische Hebe- und Senkungsvorrichtung an einem von der Firma Zeiss zur Verfügung gestellten Nivellierinstrument eingehend untersucht und mit letzterem im Herbst 1911 auch ein 12 km langes Versuchsnivellement unter gleichzeitiger Verwendung von Latten mit 2 mm-Feldern zur Ausführung gebracht.

Betreff der dabei erhaltenen günstigen Beobachtungsergebnisse soll hier nur das wohl am meisten interessierende, erreichte Genauigkeitsmass angeführt werden, nämlich mittlerer km-Fehler berechnet aus:

	für einfache Nivellierung	für Doppel-Nivellierung
1. den Standfehlern:	± 0,45 mm	± 0,32 mm
2. der Linienausgleichung:	± 0,90 mm	± 0,64 mm
3. Hinnivellement—Rückniv.:	± 0,98 mm	± 0,69 mm
und 4. der Netzausgleichung:	± 1,15 mm	

[10]) Vergl. Heil: Veränderlichkeit der Libellenkrümmung und ihre Ursachen. Zeitschr. f. Verm., 1910, S. 745.

am Instrumentenstandort beobachtet wurden. Während letzteres, in Instrumentenhöhe angebracht, seine Lage für alle Beobachtungen beibehielt, mussten die beiden „Lattenthermometer", je nachdem die Latte auf einem bestimmten Punkt aufgestellt war, gehoben, bezw gesenkt werden, um alle drei Thermometer in stets gleicher Zielhöhe zu erhalten. Die an den drei Thermometern stets gleichzeitig vorgenommenen Ablesungen erfolgten sofort, nachdem für jede Zielweite die zusammengehörigen Vor- und Rückblicke ausgeführt waren.

Neben diesen zur Untersuchung der Lallemand'schen Refraktionstheorie bestimmten Temperaturbeobachtungen wurden aber und zwar am Instrumentenstandort, noch drei weitere Thermometer mit Fünftelgrad-Teilung abgelesen. Dieselben waren an einer ca. 2,5 m langen, vertikal aufgestellten Stange mit

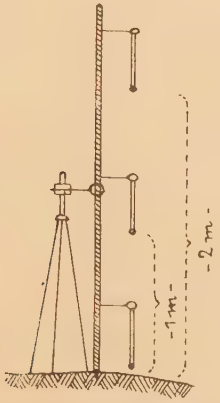


Fig. 4.

drei Eisenhacken so befestigt, dass eines am Boden, das zweite in genau 1 m und das dritte in 2 m Höhe über dem Boden sich befand. Während die beiden letzten Thermometer wie auch jene für die Untersuchung der Lallemand'schen Theorie bestimmten, zum Schutze gegen direkte Sonnenbestrahlung um die Quecksilberkugeln leichte, lose Papierrollen trugen, die jedoch der durchstreichenden Luft kein Hindernis boten, wurde für die Beobachtung der Bodentemperatur ein vom Physikalischen Institut der Technischen Hochschule gütigst zur Verfügung gestellter Assmann'scher Aspirationspsychrometer[11]) verwendet, in dem das Thermometer gegen schädliche Bodenstrahlung geschützt war. Ueber den Zweck dieser Hugershoff'schen Art der Tempera-

[11]) Dem Vorstand dieses Instituts, Herrn Professor Geheimen Hofrat Dr. H. Ebert, sei hiefür auch an dieser Stelle der gebührende Dank zum Ausdruck gebracht.

turbeobachtung durch vertikal übereinander befindliche Thermometer wird später noch ausführlich die Rede sein.

Bevor nun an die eigentlichen Refraktionsbeobachtungen gegangen werden konnte, war es notwendig, durch ein sorgfältig ausgeführtes Schleifennivellement mit nur ca. 15 m Zielweite, bei welcher wohl jeder merkliche Refraktionseinfluss ausgeschlossen ist, die Höhenlage der einzelnen 8 Fixpunkte, bezogen auf einen von ihnen als Nullpunkt, zu bestimmen, wobei sich folgende Werte ergaben:

Cote des Punktes 1:	+ 0,0000 m
2:	— 0,3816 m
3:	— 0,5718 m
4:	— 0,0510 m
6:	+ 1,4859 m
7:	+ 2,0139 m
8:	+ 2,2345 m
9:	+ 2,0894 m
(10):	+ 0,8012 m

Vom Mittelpflock 5 aus, über welchen man eine möglichst sichere Instrumentenaufstellung für alle Beobachtungen beibehielt, wurden nun ca. alle 2 Stunden auf den in 40—100 m entfernten Punkten die jeweiligen Lattenablesungen von der Folge Rückblick — Vorblick und verbunden mit den entsprechenden Temperaturbeobachtungen ausgeführt und so der Reihe nach die Höhenunterschiede 6—4, 7—3, 8—2 und 9—1 s. Fig. 2 mehrmals im Laufe des Tages gemessen. Dabei liessen sich die einzelnen Zielhöhen dadurch finden, dass man von einer gemeinsamen horizontalen Visur aus den jeweiligen Abstand eines jeden einzelnen Fixpunktes bestimmte. Die Unveränderlichkeit dieser zum mindesten für eine Beobachtungsreihe giltigen gemeinsamen Horizontalvisur wurde gegenüber einem besonderen, in nächster Nähe des Instrumentenstandorts befindlichen Kontrollfixpunkt (10), dessen Cote vorstehend angegeben ist, vor und nach jeder Beobachtungsreihe erprobt. Dabei ergab sich, dass infolge der sorgfältigen Instrumentenaufstellung die Ziellinie für alle Beobachtungsreihen des ganzen Tages in völlig gleicher Höhe blieb.

Da bei der Beobachtungsarbeit ausser mir als Beobachter am Fernrohr noch weitere 4 Personen mitzuwirken hatten, nämlich 1 Rechner zum Aufschreiben der Lattenablesungen, 1 Beobachter zum Ablesen der 4 Thermometer am Instrumentenstandort, sowie 2 Lattenträger, ist es erklärlich, dass mehrere Versuchsreihen gemacht werden mussten, bevor ein systematisches Zusammenarbeiten aller Kräfte zu erzielen war. Neben dem Gebrauch

von Wendelatten wurde stets ein Doppelnivellement für alle Fixpunkte ausgeführt, wobei sich folgende Beobachtungen ergaben:

5 Uhr morgens.

Gemeins. Horizont $= \frac{(0.8012 + 0.8063)}{2}$ m $=$ 1,2069 Doppelmeter, da es sich um eine Ablesung an der Seibt'schen Latte handelt.

		Rückblick				Vorblick			
	Punkte	9 100 m	8 80 m	7 60 m	6 40 m	4 40 m	3 60 m	2 80 m	1 100 m
Doppelmeter	Gem. Horizont	1.2069	1.2069	1.2069	1.2069	1.2069	1.2069	1.2069	1.2069 m
	Zielhöhe	0.1624	0.0898	0.2001	0.4640	1.2321	1.4926	1.3980	1.2074 m
		1.0445	1.1171	1.0068	0.7429	−0.0252	−0.2857	−0.1911	−0.0005 m
Meter	beob. Cote	2.0890	2.2342	2.0136	1.4858	−0.0504	−0.5714	0.3822	−0.0010 m
	gegeb. Cote	2.0894	2.2345	2.0139	1.4859	−0.0510	−0.5718	−0.3816	± 0 m
Unterschied:		− 0.4 mm	−0.3	−0.3	−0.1	+ 0.6	+ 0.4	−0.6	− 1.0 mm
Refraktion:		+ 0.4 mm	+ 0.2	0.0	0.0	+ 0.7	+ 0.7	−0.1	− 0.2 mm
Temp. a. d. Latte t_3 =		11,6°	11.8	12.2	12.6	t_1 = 11.9	11.5	11.7	11.9
„ „ Instr. t_2 =		11.6°	11.5	11.8	12.2				
„ am Boden:		11.6°	11.7	11.7	11.7	12.0	11.8	11.6	11.5
„ in 1 m Höhe:		11.3°	11.4	11.6	11.7	12.3	11.9	11.6	11.5
„ in 2 m Höhe:		11.3°	11.4	11.5	11.7	12.4	11.9	11.6	11.5
Mittel:		11.4°	11.5	11.6	11.7	12.2	11.9	11.6	11.5

In den Unterschieden für die einzelnen Zielhöhen ist noch der Einfluss der Erdkrümmung $=$ x enthalten; derselbe beträgt nach der Formel $x = \frac{a^2}{2R}$, worin a die Zielweite und R den Erdradius zu 6370 km bedeuten, für:

die Entfernung von 40 m . . . 0,1 mm
„ „ „ 60 m . . . 0,3 mm
„ „ „ 80 m . . . 0,5 mm
„ „ „ 100 m . . . 0,8 mm

Um diese Werte nicht für jede einzelne Beobachtungsreihe besonders berücksichtigen zu müssen, wurden die der Erdkrümmung entsprechenden Korrektionen von 0,1 bis 0,8 mm gleich an den Coten der 8 Fixpunkte angebracht, so dass sich dieselben nunmehr ergeben zu:

reduz. Cote des Punktes 1: — 0,0008 m
„ „ „ „ 2: — 0,3821 m
„ „ „ „ 3: — 0,5721 m
„ „ „ „ 4: — 0,0511 m
„ „ „ „ 6: + 1,4858 m
„ „ „ „ 7: + 2,0136 m
„ „ „ „ 8: + 2,2340 m
„ „ „ „ 9: + 2,0886 m

Unter Verwendung dieser reduzierten Coten erhält man dann die weiteren beobachteten Refraktionsgrössen:

7 Uhr morgens.

	Rückblick				Vorblick			
Zielweite	100 m	80 m	60 m	40 m	40 m	60 m	80 m	100 m
Gem. Horizont	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070
Zielhöhe	0.1634	0.0903	0.2002	0.4642	1.2323	1.4931	1.3982	1.2079
	1.0436	1.1167	1.0068	0.7428	—0.0253	—0.2861	—0.1912	—0.0009
beob. Cote	2.0872	2.2334	2.0136	1.4856	—0.0506	—0.5722	—0.3824	—0.0018
gegeb. Cote	2.0886	2.2340	2.0136	1.4858	—0.0511	—0.5721	—0.3821	—0.0008
Refraktion	—1.4 mm	—0.6	+ 0.0	—0.2	+ 0.5	—0.1	—0.3	—1.0
Temp. a. d. Latte t_3 =	20.2°	20.0	19.9	20.0	t_1 = 19.5	19.3	19.0	19.1
„ „ Instr. t_2 =	19.4°	19.6	19.5	19.2				
Temp. am Boden	18.7°	18.0	17.3	16.7	19.7	18.9	18.5	18.7
„ in 1 m Höhe =	19.4°	19.0	18.6	18.0	20.1	20.3	19.7	19.4
„ in 2 m Höhe =	18.9°	18.6	18.3	18.0	20.0	19.7	19.4	19.1
Mittel:	19.0°	18.5	18.1	17.6	19.9	19.6	19.2	19.1

8½ Uhr morgens.

	Rückblick				Vorblick			
Zielweite	100 m	80 m	60 m	40 m	40 m	60 m	80 m	100 m
Gem. Horizont	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070
Zielhöhe	0.1651	0.0913	0.2007	0.4642	1.2326	1.4936	1.3991	1.2082
	1.0419	1.1157	1.0063	0.7428	—0.0256	—0.2866	—0.1921	—0.0012
beob. Cote	2.0838	2.2314	2.0126	1.4856	—0.0512	—0.5732	—0.3842	—0.0024
gegeb. Cote	2.0886	2.2340	2.0136	1.4858	—0.0511	—0.5721	—0.3821	—0.0008
Refraktion	—4.8 mm	—2.6	—1.0	—0.2	—0.1	—1.1	—2.1	—1.6
Temp. t_3 =	20.4°	20.9	20.0	19.7	t_1 = 19.0	18.3	18.8	18.8
Temp. t_2 =	19.3°	19.9	19.4	19.3				
Temp. a. Boden	20.5°	21.0	20.6	19.4	23.0	22.3	21.5	20.9
„ in 1 m Höhe	18.6°	19.5	18.0	17.5	21.0	20.5	19.9	19.3
„ in 2 m Höhe	17.5°	18.6	18.3	17.7	19.0	18.8	18.3	18.3
Mittel:	18.9°	19.7	18.9	18.2	21.0	20.5	19.9	19.5

10½ Uhr morgens.

	Rückblick				Vorblick			
Zielweite	100 m	80 m	60 m	40 m	40 m	60 m	80 m	100 m
Gem. Horizont	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070
Zielhöhe	0.1662	0.0919	0.2007	0.4645	1.2326	1.4933	1.3991	1.2086
	1.0408	1.1151	1.0063	0.7425	—0.0256	—0.2863	—0.1921	—0.0016
beob. Cote	2.0816	2.2302	2.0126	1.4850	—0.0512	—0.5726	—0.3842	—0.0032
gegeb. Cote	2.0886	2.2340	2.0136	1.4858	—0.0511	—0.5721	—0.3821	—0.0008
Refraktion	—7.0 mm	—3.8	—1.0	—0.8	—0.1	—0.5	—2.1	—2.4
Temp. t_3 =	24.0°	23.3	23.0	22.6	t_1 = 21.9	22.2	22.8	22.0
Temp. t_2 =	23.1°	22.4	23.4	22.8				
Temp. a. Boden	25.3°	25.1	24.2	24.5	24.8	25.0	25.3	25.4
„ in 1 m Höhe	23.3°	23.1	22.7	22.8	23.2	23.5	23.0	23.1
„ in 2 m Höhe	21.5°	20.9	20.8	20.0	21.7	21.8	21.2	21.5
Mittel:	23.4°	23.0	22.6	22.3	23.2	23.4	23.2	23.3

1 Uhr mittags.

	Rückblick				Vorblick			
Zielweite	100 m	80 m	60 m	40 m	40 m	60 m	80 m	100 m
Gem. Horizont	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070
Zielhöhe	0.1663	0.0922	0.2009	0.4646	1.2326	1.4936	1.3991	1.2084
	1.0407	1.1148	1.0061	0.7424	−0.0256	−0.2866	−0.1921	−0.0014
beob. Cote	2.0814	2.2296	2.0122	1.4848	−0.0512	−0.5732	−0.3842	−0.0028
gegeb. Cote	2.0886	2.2340	2.0136	1.4858	−0.0511	−0.5721	−0.3821	−0.0008
Refraktion	−7.2 mm	−4.4	−1.4	−1.0	−0.1	−1.1	−2.1	−2.0
Temp. t_3 =	25.8°	26.2	26.1	25.9	t = 26.4	26.7	26.0	25.4
Temp. t_2 =	26.2°	27.0	27.1	26.8				
Temp. a. Boden	27.1°	26.9	26.7	27.0	28.1	27.4	26.7	26.9
„ in 1 m Höhe	26.4°	26.8	26.3	26.2	26.8	27.8	26.7	26.1
„ in 2 m Höhe	25.6°	26.1	25.3	24.7	24.9	26.4	25.7	24.9
Mittel:	26.4°	26.6	26.1	26.0	26.6	27.2	26.4	26.0

3 Uhr nachmittags.

	Rückblick				Vorblick			
Zielweite	100 m	80 m	60 m	40 m	40 m	60 m	80 m	100 m
Ges. Horizont	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070
Zielhöhe	0.1655	0.0913	0.2006	0.4642	1.2323	1.4934	1.3988	1.2084
	1.0415	1.1157	1.0064	0.7428	−0.0253	−0.2864	−0.1918	−0.0014
beob. Cote	2.0830	2.2314	2.0128	1.4856	−0.0506	−0.5728	−0.3836	−0.0028
gegeb. Cote	2.0886	2.2340	2.0136	1.4858	−0.0511	−0.5721	−0.3821	−0.0008
Refraktion	−5.6 mm	−2.6	−.08	−0.2	+0.5	−0.7	−1.5	−2.0
Temp. t_3 =	28.3°	28.3	28.1	26.7	t_1 = 27.1	27.0	27.0	25.8
Temp. t_2 =	27.2°	26.7	27.3	27.0				
Temp. a. Boden	26.8°	26.4	26.7	28.1	26.6	26.5	26.5	26.4
„ in 1 m Höhe	27.5°	27.1	27.0	27.4	27.1	27.7	27.3	26.9
„ in 2 m Höhe	26.8°	26.7	26.9	26.8	27.3	27.4	26.6	26.7
Mittel:	27.0°	26.7	26.9	27.4	27.0	27.2	26.8	26.7

6 Uhr nachmittags.

	Rückblick				Vorblick			
Zielweite	100 m	80 m	60 m	40 m	40 m	60 m	80 m	100 m
Gem. Horizont	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070	1.2070
Zielhöhe	0.1627	0.0900	0.2003	0.4642	1.2325	1.4931	1.3978	1.2071
	1.0443	1.1170	1.0067	0.7428	−0.0255	−0.2861	−0.1908	−0.0001
beob. Cote	2.0886	2.2340	2.0134	1.4856	−0.0510	−0.5722	−0.3816	−0.0002
gegeb. Cote	2.0886	2.2340	2.0136	1.4858	−0.0511	−0.5721	−0.3821	−0.0008
Refraktion	±0.0 mm	±0.0	−0.2	−0.2	+0.1	−0.1	+0.5	+0.6
Temp. t_3 =	21.0°	20.9	20.9	20.6	t_1 = 20.3	20.5	20.5	20.9
Temp. t_2 =	20.3°	20.2	20.1	20.1				
Temp. a. Boden	21.4°	21.6	22.0	22.2	19.7	20.2	20.7	20.1
„ in 1 m Höhe	20.7°	21.0	21.2	21.7	18.9	19.3	19.6	20.2
„ in 2 m Höhe	20.4°	20.8	21.2	21.4	18.6	19.2	19.4	19.9
Mittel:	20.8°	21.1	21.5	21.8	19.1	19.6	19.9	20.1

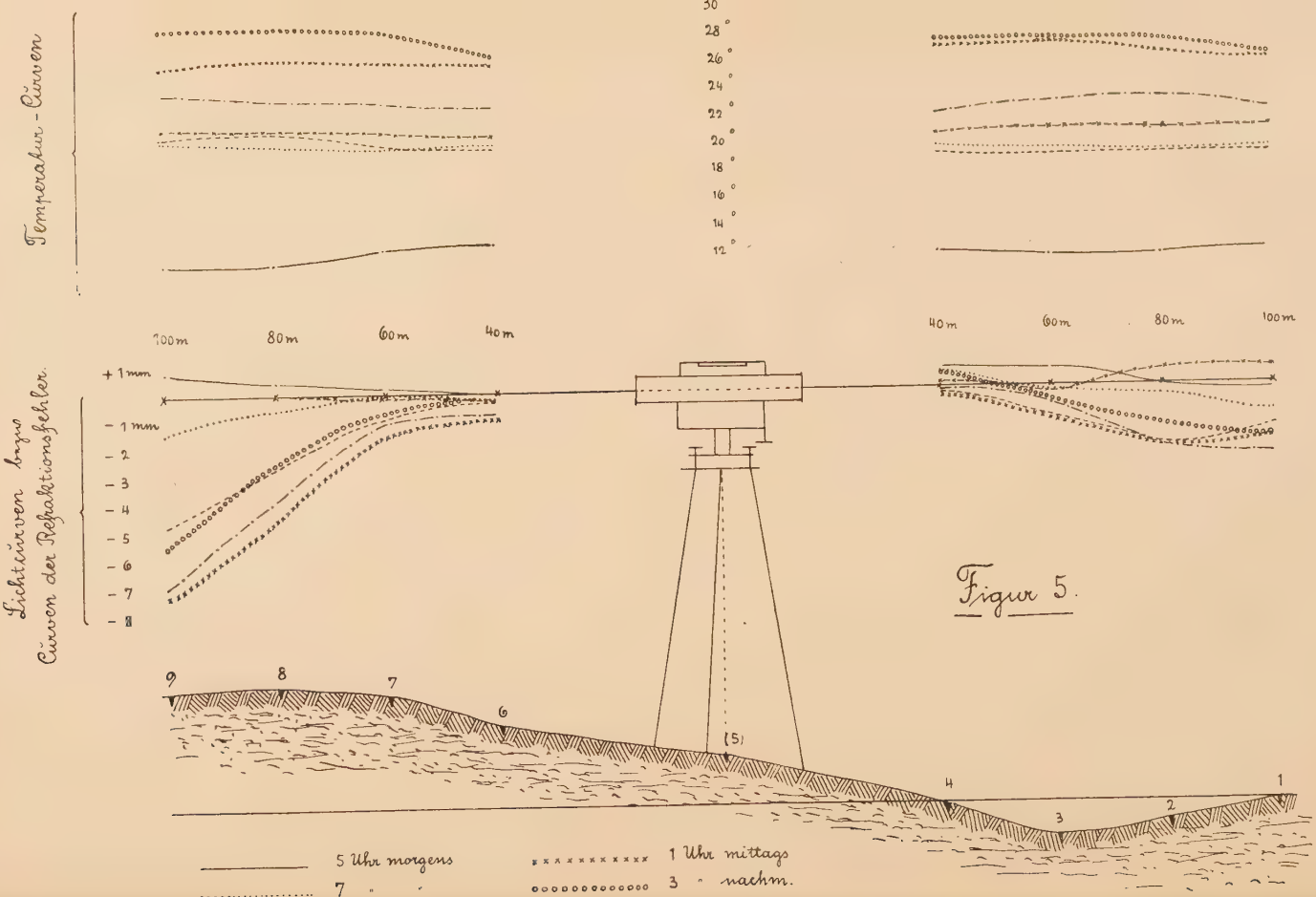
Bei näherer Betrachtung der vorstehenden Beobachtungswerte lässt sich folgendes erkennen:

Die durch den Refraktionseinfluss bewirkten Aenderungen der Zielhöhen, kurz die Refraktionsfehler genannt, sind in früher Morgenstunde überwiegend

positiv, die Lichtkurve zeigt also eine Krümmung nach aufwärts. Dies trifft zu, wenn bei Tagesanbruch der Boden bezw. die ihm zunächst befindlichen Luftschichten kälter sind als die höher gelegenen Schichten der Atmosphäre. Bei steigender Temperatur, also mit Sonnenaufgang, erwärmt sich der Boden aber rascher als die Luft; die der Erdoberfläche direkt benachbarten Luftmassen erhalten daher durch Bodenstrahlung bald eine höhere Temperatur gegenüber jener in den oberen Luftschichten. Dadurch wird eine negative Krümmung des Lichtstrahls bewirkt, d. h. derselbe strebt nach abwärts, dem Boden zu. Diese negative Krümmung hält fast den ganzen Tag über an, so dass, abgesehen von wenigen Ausnahmen morgens und abends, die Zielhöhen infolge des Refraktionseinflusses stets zu klein beobachtet werden. Weiter lässt sich aus den Beobachtungsergebnissen ersehen, dass die Grösse der Refraktionsfehler wesentlich von der jeweils herrschenden Temperatur bedingt wird. Morgens und abends bei niederer Temperatur sind auch die Refraktionsfehler nur gering, zum Teil sind überhaupt keine vorhanden. Mit zunehmender Temperatur, also bei steigender Sonne, werden die Refraktionsfehler immer grösser, um beim Temperaturmaximum gegen 1 Uhr mittags ihren größten Wert zu erreichen.

Letzterer beträgt beispielsweise für einen sehr warmen Beobachtungstag bei 100 m Zielweite 6—7 mm, ein Wert, den man von solcher Grösse wohl kaum erwarten konnte. Die Richtigkeit dieser Beobachtung ist ausser durch das ausgeführte Doppelnivellement durch die Tatsache verbürgt, dass ungefähr ebenso grosse Refraktionsfehler auch an einem späteren Beobachtungstag mit annähernd gleich hohen Temperaturen gefunden wurden, worüber weiter unten die Rede sein wird. Analog ihrem Verhalten, mit steigender Temperatur zu wachsen, nehmen die Refraktionsfehler im Laufe des Nachmittags bei sinkender Temperatur wieder ab, um gegen Sonnenuntergang den Wert 0 anzunehmen. Versuchsweise wurde auch nach Sonnenuntergang, zwischen 8 und 9 Uhr abends, noch eine Beobachtungsreihe begonnen; doch musste dieselbe wegen nicht genügender Beleuchtungsvorrichtungen wieder aufgegeben werden.

Naturgemäss zeigen die Refraktionsfehler eine Abhängigkeit von der Zielweite und wachsen nahezu mit dem Quadrat derselben. Dieses Gesetz des Anwachsens der Refraktionsfehler wird jedoch hier schon deswegen nicht völlig gelten, weil, abgesehen von Beobachtungsunsicherheiten die Zielhöhenbeobachtungen bei den 4 verschiedenen Zielweiten keineswegs zu gleicher Zeit, also auch nicht bei völlig gleichen meteorologischen Verhältnissen ausgeführt sind. Letzteres folgt in der Tat aus den innerhalb der gleichen Beobachtungsreihe auftretenden Temperaturänderungen.


Temperatur-Curven
30°
28°
26°
24°
22°
20°
18°
16°
14°
12°
100m
80m
60m
40m
40m
60m
80m
100m
Lichtcurven bezw.
Curven der Reflexionsfehler.
+ 1mm
– 1mm
– 2
– 3
– 4
– 5
– 6
– 7
– 8
9
8
7
6
(5)
4
3
2
1
5 Uhr morgens
7 " "
1 Uhr mittags
3 " nachm.

Figur 5.

Vergleicht man nun die hier in den Rückblicken sich zeigenden Refraktionsfehler mit den für die gleichen Zielweiten entsprechenden Werten der Vorblicke, so wird man bei allen Beobachtungsreihen finden, dass erstere, also die Abweichungen der bergwärts gerichteten Visuren, durchwegs grössere sind als jene bei den in entgegengesetzter Richtung beobachteten Zielungen.

Die gegen den Berg zu gewandten Ziellinien erleiden also regelmässig gegenüber den talwärts beobachteten eine stärkere Krümmung, bezw. grössere Ablenkung von der wagrechten Lage. Diese mit Asymmetrie der Lichtkurve bezeichnete Erscheinung findet ihre Begründung darin, dass die von den bergwärts gerichteten Ziellinien durchlaufenen Luftschichten infolge der Bodennähe stärker in ihrer Temperatur und Dichtigkeit beeinflusst werden, als dies in den mehr bodenfernen Schichten der Talvisuren der Fall ist.

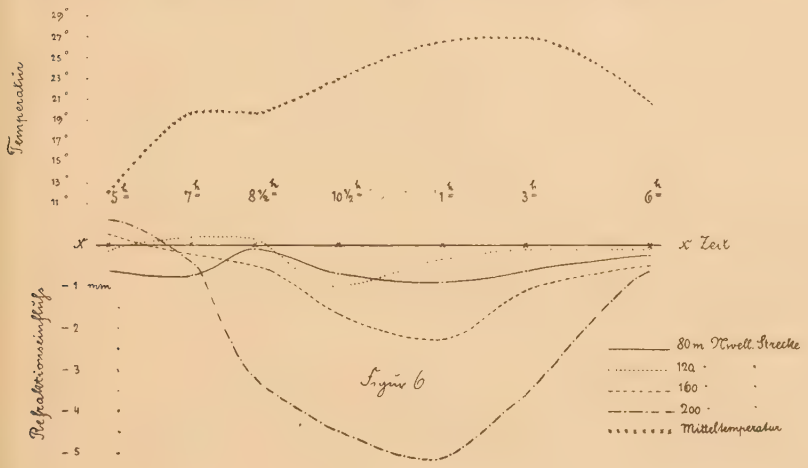
Zur besseren Veranschaulichung der aus den Beobachtungen gezogenen Schlüsse ist es zweckmässig, die für jede Beobachtungsreihe gefundene Lichtkurve in einem besonderen Koordinatensystem mit den Zielweiten als Abszissen und den Refraktionsfehlern als Ordinaten aufzutragen und gleichzeitig die dazu gehörigen Temperaturkurven aus den Mitteltemperaturen zu konstruieren.

Aus der Darstellung auf S. 23 ist deutlich ersichtlich, wie im Laufe des Tages bei den wechselnden Temperaturen die Lichtkurve schwankt; in gleicher Weise ist daraus leicht deren Asymmetrie im geneigten Gelände zu erkennen. Bemerkt muss jedoch werden, dass, wie auch an anderen Tagen beobachtet wurde, die Temperatur, nachdem sie mit dem höchsten Sonnenstand ihr Maximum erreicht hat, wenigstens in den untersten Luftschichten keineswegs gleich wieder zu fallen beginnt. Vielmehr schwankt dieselbe, wahrscheinlich infolge der etwas verzögerten Bodenausstrahlung bezw. verlangsamten Bodenabkühlung noch einige Zeit um diesen grössten Wert hin und her, wobei es, wie hier, wohl vorkommen kann, dass sie sogar über das normale Maximum hinausgeht. So ist es möglich, dass hier die Temperatur nachmittags 3 Uhr im Durchschnitt noch um 0,7° höher war als jene um 1 Uhr mittags.

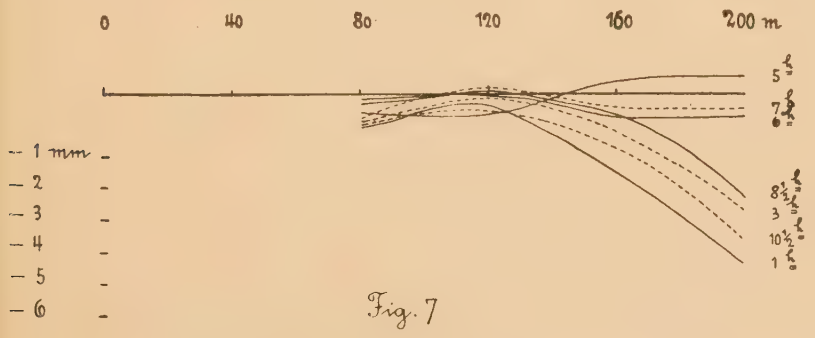
Nach dieser kurzen Betrachtung des Refraktionseinflusses auf eine einzelne Zielung soll zwecks Erprobung der Lallemand'schen Theorie die Wirkung der schon mehrfach erwähnten Asymmetrie der Lichtkurve bei vorstehenden Beobachtungen untersucht werden. Zu diesem Zwecke bildet man die Höhenunterschiede 9—1, 8—2, 7—3 und 6—4, die während des Tages infolge des Refraktionseinflusses von ihren wirklichen Werten um nachstehende Beträge in Millimetern abweichen:

Nivell. Strecke	△ h	5h	7h	8½h	10½h	1h	3h	6h
80 m	+1.5369 m	−0.6	−0.7	−0.1	−0.7	−0.9	−0.7	−0.3
120 „	+2.5858 „	−0.6	+0.2	+0.1	−0.5	−0.3	−0.1	−0.1
160 „	+2.6136 „	+0.3	−0.3	−0.5	−1.7	−2.3	−1.1	−0.5
200 „	+2.0894 „	+0.6	−0.4	−3.2	−4.6	−5.2	−3.6	−0.6

Durch graphische Darstellung dieser Fehlerwerte E mm ergeben sich folgende Kurven; hiebei stellt die oberhalb der x Achse liegende Kurve den mittleren Temperaturverlauf für die einzelnen Beobachtungszeiten dar.



Gleichzeitig erfolgt die Darstellung der Fehler **Emm** für die nivellierten Strecken von 80—200 m.



Aus obiger Tabelle sowie den dazu gehörigen Kurven geht deutlich hervor, dass analog der durch Refraktionswirkung verursachten Zielhöhenänder-

ung auch die Höhenunterschiede und zwar infolge des beim geneigten Gelände im Vor- und Rückblick verschiedenen Refraktionseinflusses eine systematische Aenderung während des Tages erfahren. Die Fehlerwerte E dieser wiederholt gemessenen Höhenunterschiede sind frühmorgens in geringem Masse positiv, werden aber dann negativ und behalten dieses Vorzeichen unverändert bis zum Abend bei. Während morgens und abends die absoluten Werte von E gering sind, nehmen sie gegen Mittag bei der höchsten Temperatur ein Maximum an; ebenso zeigen sie auch hinsichtlich der Zielweite ein analoges Verhalten wie die Refraktionseinflüsse bei den Zielhöhen.

Im allgemeinen verlaufen die Kurven der Refraktionsfehler der Höhenunterschiede systematisch zur Tageszeit wie auch zur Tagestemperatur. Die Fehlerkurven können daher näherungsweise als ein Spiegelbild der Temperaturkurven aufgefasst werden, so dass die Beziehungen zwischen beiden Kurvenarten durch einen allgemeinen Ausdruck, etwa von der Form:

$$y = a - K \cdot f(t)$$

darzustellen wären. In diesem bedeutet a eine von der Zielweite abhängige Konstante, während $K \cdot f(t)$ die zwischen der Zeit t und den beobachteten Temperaturen bestehende Beziehung mit dem Krümmungsfaktor K zum Ausdruck bringt.[12])

Einigermassen sichere Näherungswerte für den Ausdruck von y (wohl Parabeln) lassen sich naturgemäss nur durch eine grosse Anzahl von Beobachtungen erhalten, die bei den verschiedensten Witterungsverhältnissen und Jahreszeiten ausgeführt werden müssten. Die hiefür aufzuwendende Mühe wäre aber insoferne nicht umsonst, als für den Fall des Bekanntseins einer solchen Näherungsbeziehung die Möglichkeit bestünde, bei einem Nivellement mit einfachen Temperaturbeobachtungen umgekehrt auf die durch Refraktionseinflüsse zu erwartende Unsicherheit in den Nivellementsergebnissen zu schliessen. Die Mehrarbeit einer eventuell nur einmaligen Temperaturablesung auf jedem Instrumentenstand, wobei das Thermometer vielleicht am besten in Instrumentenhöhe anzubringen wäre, dürfte kaum in Betracht kommen.

[12]) Dieser graphische Vergleich ist insoferne etwas einseitig, als bei demselben sowohl die verschiedenen Zielhöhen und Höhenunterschiede, wie auch der Einfluss der wechselnden Temperaturgradienten vorerst völlig vernachlässigt werden muss. Die Untersuchung über die Bedeutung dieser letzteren Bestimmungsgrössen für die Refraktion kann erst in den nächsten Abschnitten erfolgen.

Es soll nunmehr untersucht werden, inwieweit diese durch Beobachtung gefundenen Werte von E jenen mittels der Lallemand'schen Refraktionsformel rechnerisch bestimmten Werten entsprechen. Zu diesem Vergleiche verwenden wir für E statt des komplizierten Formelausdrucks in 2] die von Jordan durch Umformung erhaltene Näherungsgleichung in 3], nämlich:

$$E^{mm} = -0.00108 \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{t_3 - t_1}{(1+\alpha t)^2} \cdot \frac{L^2}{D}\left(\frac{1-\tau}{12} + \frac{(1-)^2}{24} + \ldots\right)$$

Beim Einsetzen von L = 2 Z = doppelter Zielweite und Zusammenfassung wird:

$$E^{mm} = -0.00018 \frac{B}{760} \cdot \frac{Z^2}{D} \cdot \frac{1}{(1+\alpha t)^2} \cdot (\tau^2 - 4\tau + 3)(t_3 - t_1) \ldots\ldots\ldots 3^a.$$

Hierin kann für die 4 verschiedenen Zielweiten, für die Höhenunterschiede sowie für den Luftdruck B = 724, der völlig genügend als konstant für die vorliegenden Beobachtungen anzusehen ist, ein Faktor c folgendermassen bestimmt werden:

bei 40 m Zielweite $c_1 = -0{,}00018 \cdot \frac{724}{760} \cdot \frac{1600}{1.54} = -0{,}18$

„ 60 m „ $c_2 = -0{,}00018 \cdot$ „ . $\frac{3600}{2.59} = -0{,}24$

„ 80 m „ $c_3 = -0{,}00018 \cdot$ „ . $\frac{6400}{2.60} = -0{,}42$

„ 100 m „ . $c_4 = -0{,}00018 \cdot$ „ . $\frac{10000}{2\,09} = -0{,}82$

Aus den nach Lallemand beobachteten Temperaturen t_1, t_2 und t_3 erhält man sonach folgende Werte für E:

5 Uhr morgens.

Mitteltemperatur $t = 11{,}8^0$; $\frac{1}{(1+\alpha t)^2} = 0.96$.

Zielweite	τ	$\frac{c}{(1+\alpha t)^2}$	$\tau^2-4\tau+3$	t_3-t_1	berechn. E	beob. E	Differenz d
40 m	1.3	—0.17	—0.5	$+0.7^0$	+0.1 mm	—0.6 mm	+0.7 mm
60 „	1 3	—0.23	—0.5	$+0.7^0$	+0.1	—0.6	+0.7
80 „	1.5	—0.40	—0.7	$+0.1^0$	+0 0	+0.3	—.03
100 „	0	—0.79	+3.0	-0.3^0	+0.7	+0.6	+0.1
							[d] = +1.2 mm

7 Uhr morgens.

Mitteltemperatur $t = 19{,}6^0$; $\frac{1}{(1+\alpha t)^2} = 0{,}88$.

Zielweite	τ	$\frac{c}{(1+\alpha t)^2}$	$\tau^2 - 4\tau + 3$	$t_3 - t_1$	berechn. E	beob. E	Differenz d
40 m	2.7	—0.16	—0.5	$+0.5^0$	0 mm	—0.7 mm	+0.7 mm
60 „	2.0	—0.21	—1.0	+0.6	+0.1	+0.2	—0.1
80 „	0.7	—0.37	+0.7	+1.0	—0.3	—0.3	0
100 „	2.7	- 0.72	—0.5	+1.1	+0.3	—0.4	+0.7
							[d] = +1.3 mm

8½ Uhr vormittags.

Mitteltemperatur $t = 19{,}5^0$; $\frac{1}{(1+\alpha t)^2} = 0{,}88$.

Zielweite	τ	$\frac{c}{(1+\alpha t)^2}$	$\tau^2 - 4\tau + 3$	$t_3 - t_1$	berechn. E	beob. E	Differenz d
40 m	1.3	—0.16	—0.5	$+0.7^0$	+0.1 mm	—0.1 mm	+0.2 mm
60 „	0.5	—0.21	+1.25	+1.7	—0.4	+0.1	—0.5
80 „	0.9	—0.37	+0.2	+2.1	—0.2	—0.5	+0.3
100 „	2.2	—0.72	—1.0	+1.6	+1.0	—3.2	+4.2
							[d] = +4.2 mm

10½ Uhr vormittags.

Mitteltemperatur $t = 22{,}8^0$; $\frac{1}{(1+\alpha t)^2} = 0{,}85$.

Zielweite	τ	$\frac{c}{(1+\alpha t)^2}$	$\tau^2 - 4\tau + 3$	$t_3 - t_1$	berechn. E	beob. E	Differenz d
40 m	0.2	—0.15	+2.2	$+0.7^0$	—0.2 mm	—0.7 mm	+0.5 mm
60 „	0.3	—0.20	+2.7	+0.8	—0.4	—0.5	+0.1
80 „	2.2	—0.35	—1.0	+0.5	+0.2	—1.7	+1.9
100 „	0.8	—0.69	+0.4	+2.0	—0.6	—4.6	+4.0
							[d] = +6.5 mm

1 Uhr mittags.

Mitteltemperatur $t = 26{,}3^0$; $\frac{1}{(1+\alpha t)^2} = 0{,}85$.

Zielweite	τ	$\frac{c}{(1+\alpha t)^2}$	$\tau^2 - 4\tau + 3$	$t_3 - t_1$	berechn. E	beob. E	Differenz d
40 m	2.2	—0.15	—1.0	—0.5°	—0.1 mm	—0.9 mm	+0.8 mm
60 „	2.5	—0.20	—0.75	—0.6	—0.1	—0.3	+0.2
80 „	0.8	—0.35	+0.4	+0.2	0	—2.3	+2.3
100 „	0.5	—0.69	+1.25	+0.4	—0.3	—5.2	+4.9
							[d] = +8.2 mm

3 Uhr nachmittags.

Mitteltemperatur $t = 27{,}2^0$; $\frac{1}{(1+\alpha t)^2} = 0{,}83$.

Zielweite	τ	$\frac{c}{(1+\alpha t)^2}$	$\tau^2 - 4\tau + 3$	$t_3 - t_1$	berechn. E	beob. E	Differenz d
40 m	3.0	—0.15	0	—0.4	0 mm	—0.7 mm	+0.7 mm
60 „	2.7	—0.20	—0.5	+1.1	+0.1	—0.1	+0.2
80 „	4.0*)		+3.0*)	+1.2*)	—1.3*)		—0.2*)
	(5.3)	—0.35	(+9.9)	(+1.3)	(—3.8)	—1.1	(—2.7)
100 „	0.8	—0.68	+0.4	+2.5	—0.7	—3.6	+2.9
							[d] = +3.6 mm

6 Uhr abends.

Mitteltemperatur $t = 20{,}5^0$; $\frac{1}{(1+\alpha t)^2} = 0{,}87$.

Zielweite	τ	$\frac{c}{(1+\alpha t)^2}$	$\tau^2 - 4\tau + 3$	$t_3 - t_1$	berechn. E	beob. E	Differenz d
40 m	2.5	—0.16	—0.75	+0.3	0 mm	—0.3 mm	+0.3 mm
60 „	2.0	—0.20	—1.0	+0.4	+0.1	—0.1	+0.2
80 „	2.3	—0.37	—0.9	+0.4	+0.1	—0.5	+0.6
100 „	1.2	—0.72	—0.4	+0.1	0	—0.6	+0.6
							[d] = +1.7 mm

*) Der Grund zur Abänderung der für 80 m Zielweite giltigen Grössen wird auf S. 31 Anm. 14 erläutert.

In der letzten Spalte der vorstehenden Rechentabellen sind die Beträge d in Millimetern angegeben, um welche die berechneten Werte für E von den beobachteten E abweichen. Wie man sieht, erreichen diese Differenzen zum Teil so grosse Beträge, dass von einer auch nur angenäherten Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung nicht mehr die Rede sein kann. Während die Abweichungen bei 40 m und 60 m Zielweite durchwegs bei 80 m noch zum Teil unter 1,0 mm bleiben, überschreiten sie bei 100 m Zieldistanz diese Fehlergrenze in mehr als der Hälfte der Beobachtungen um ein Vielfaches derselben. Auffallend ist, dass trotz des im Laufe des Tages stattgehabten grossen Temperaturunterschiedes von durchschnittlich 11,8° bis 27,3° C alle nach der Lallemand'schen Formel berechneten E sehr klein ausfallen, so dass die meisten Abweichungen bezw. Differenzen d positives Vorzeichen erhalten. Mit Rücksicht hierauf muss man sich darüber Klarheit verschaffen, welche Sicherheit den berechneten Werten von E zuerkannt werden darf. Massgebend für dieselben ist gemäss der Lallemand'schen Formel, abgesehen von dem totalen Temperaturgefälle $t_3 - t_1$, die Grösse $\tau = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$, welcher Quotient gegenüber den anderen Bestimmungsgrössen in weitaus überwiegendem Masse die Werte der E beeinflusst. Als Beispiel hiefür denken wir uns in der Beobachtung um 3 Uhr nachmittags für den Höhenunterschied bei 80 m Zielweite die gemessenen Temperaturen $t_3 = 28{,}3°$ und $t_2 = 26{,}7°$ um je 0,1° geändert, wodurch $t_3 = 28{,}2°$ und $t_2 = 26{,}6°$ wird,, während $t_1 = 27{,}0°$, um überhaupt eine Aenderung in τ zu erhalten, gleichbleiben soll. Dann ergibt sich an Stelle des vorher gültigen $\tau = \frac{28{,}3 - 26{,}7}{26{,}7 - 27{,}0} = 5{,}3$ [18]) als neues $\tau = \frac{28{,}2 - 26{,}6}{26{,}6 - 27{,}0} = 4{,}0$. Die vorgenommene Aenderung von nur 0,1° in zwei Temperaturen bewirkt also bereits eine Aenderung von mehr als einer Einheit im Verhältnis zwischen den im Rück- und im Vorblick statthabenden Temperaturgefällen. Somit spielt die Temperaturmessung bei der Lallemand'schen Refraktionstheorie eine grosse Rolle. Es ist daher aus der praktisch nie ganz auszuscheidenden, unvermeidlichen Unsicherheit in der Temperaturbeobachtung erklärlich, dass die oben nach Lallemand gerechneten Werte für E gewisse Abweichungen gegenüber den wirklich beobachteten Refraktionsfehlern zeigen müssen.

Doch dürften die oben zusammengestellten Differenzen d keineswegs nur auf unvermeidliche Beobachtungsfehler zurückzuführen sein. Vielmehr zeigt sich ein gewisser systematischer Fehlereinfluss, wenn man für jede Beobachtungsreihe die algebraische Summe der d bildet und diese Summenwerte

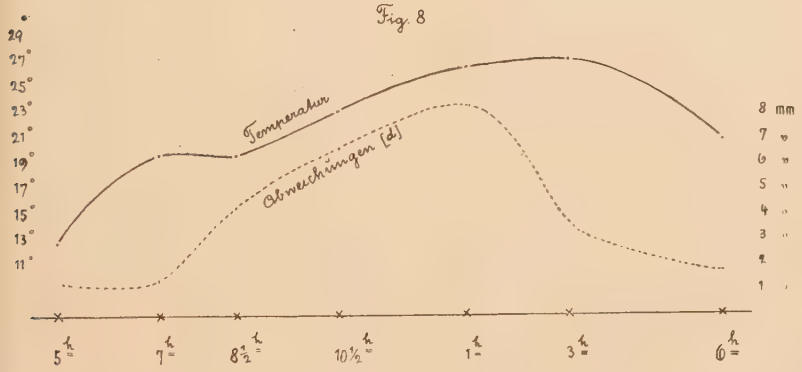
---

[18]) Nach Seite 11 wird τ immer als positiv gewählt.

graphisch in dem auf S. 25 (Fig. 6) bereits verwendeten Koordinatensystem: Zeit—Temperatur aufträgt.[14]) Die dabei erhaltene Kurve der Abweichungen [d] besitzt gemäss vorstehender Darstellung eine ähnliche Form wie jene, durch welche die Mitteltemperatur für jede Beobachtungsreihe zum Ausdruck kommt.

Diese Tatsache dürfte beweisen, dass in der Lallemand'schen Refraktionsformel die Temperatur nicht im richtigen Masse berücksichtigt ist, da andererseits wohl kaum zufällig bei steigender Temperatur ein gleichzeitiges Wachsen der [d] und umgekehrt bei fallender Temperatur eine Ab-

Fig. 8



nahme dieser Fehlersumme stattfinden wird. Ist auch die Zahl der angestellten Beobachtungen eine verhältnismässig geringe, so darf dennoch deren Ergebnis mit Rücksicht darauf als stichhaltig betrachtet werden, dass zwei spätere Beobachtungstage im wesentlichen die gleichen Resultate ergaben. Somit kann es als erwiesen gelten, dass in der Nähe des Bodens die durch stete Bodenstrahlung hervorgerufenen Temperaturschwankungen einen viel bedeutenderen Einfluss auf die Grösse der Refraktionswirkung ausüben, als dies bis jetzt von Lallemand und auch von anderer Seite, wie wir noch sehen werden, angenommen wurde.

---

[14]) Für die Beobachtung um 3 Uhr nachmittags ist hier bei 80 m Zielweite statt $\tau = 5{,}3$ der auf S. 29 bezw. S. 30 nachträglich verbesserte Wert $\tau = 4{,}0$ verwendet, was insofern statthaft sein wird, als der frühere Betrag von 5,3 im Vergleich zu allen anderen Grössen τ als der weitaus grösste und daher wohl als der unsicherste aus der Beobachtung gefunden wurde.

III. Refraktionstheorie von Jordan und Hugershoff'sche Formel.

Nach Lallemand ist es Jordan gewesen, welcher sich mit der Ableitung einer Refraktionsformel für das geometrische Nivellement beschäftigte. In der Zeitschr. f. Verm., 1908, S. 101/102, versucht er unter teilweiser Verwertung der Lallemand'schen Theorie die von ihm für terrestrische Refraktion aufgestellte Formel:

$$K = 0.2325 \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{1}{(1+\alpha t)^2} (1 - 29.39\, n),$$

wobei $+ n = -\frac{dt}{dh}$ die Abnahme der Lufttemperatur für eine Höhenzunahme von 1 m bedeutet, für das Nivellement umzugestalten.

Dabei erhält er für

$$E^{mm} = -0.0016 \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{t_s - t_1}{(1+\alpha t)^2} \cdot \frac{L^2}{D} \cdot \frac{1-\tau}{12} \quad \ldots\ldots\ldots 4.],$$

welche Gleichung, wie Jordan a. a. O. selber bemerkt, die gleiche Form als der Näherungsausdruck in 3] besitzt. Immerhin stimmen die zu Beginn der beiden Formeln stehenden Koeffizienten 0,0016 bei Jordan und 0,00108 bei Lallemand nur auf $^1/_3$ ihres Wertes zusammen, was darin begründet sein wird, dass Jordan das in 3] vorkommende quadratische Glied $\frac{(1-\tau)^2}{24}$ vernachlässigte. Ich habe aus den Beobachtungsdaten die E auch nach dieser Jordan'schen Näherungsformel gerechnet und dabei erhalten:

a) Zielweite bei 40 m.

	5 h	7 h	8½ h	10½ h	1 h	3 h	6 h
berechn. E	+0.1 mm	+0.4 mm	+0.1 mm	−0.2 mm	−0.3 mm	−0.3 mm	+0.2 mm
beob. E	−0.6	−0.7	−0.1	−0.7	−0.9	−0.7	−0.3
Differenz d	+0.7	+1.1	+0.2	+0.5	+0.6	+0.4	+0.5

b) für Zielweite von 60 m.

	5h	7h	8½h	10½h	1h	3h	6h
berechn. E	+0.1mm	+0.3mm	—0.5mm	—0.3mm	—0.5mm	+1.0mm	+0.2mm
beob. E	—0.6	+0.2	+0.1	—0.5	—0.3	—0.1	—0.1
Differenz d	+0.7	+0.1	—0.6	+0.2	—0.2	+1.1	+0.3

c) für Zielweite von 80 m.

	5h	7h	8½h	10½h	1h	3h	6h
berechn. E	+0.1mm	—0.3mm	—0.2mm	+0.6mm	0 mm	+3.5mm	+0.5mm
beob. E	+0.3	—0.3	—0.5	—1.7	—2.3	—1.1	- 0.5
Differenz d	—0.2	0	+0.3	+2.3	+2.3	+4.6	+1.0

d) für Zielweite von 100 m.

	5h	7h	8½h	10½h	1h	3h	6h
berechn. E	+0.7mm	+4.2mm	+4.2mm	— 0.9mm	—0.4mm	—1.1mm	0 mm
beob. E	+0.6	—0.4	—3.2	—4.6	—5.2	—3.6	—0.6
Differenz d	+0.1	+4.6	+7.4	+3.7	+4.8	+2.5	+0.6

Wie nicht anders zu erwarten, erreichen die Abweichungen d der mittels der Jordan'schen Formel in 4] berechneten E von den Beobachtungswerten E annähernd die gleichen Beträge, wie sie sich bei der Bestimmung nach Lallemands Ausdruck 3a] zeigen. Es findet daher auch bei Jordans Näherungsformel die Temperatur nicht die ihr gebührende Berücksichtigung.

Während sonach Lallemand bei der Refraktion im Nivellement, wie wir gesehen haben, für die Temperaturabnahme mit der Höhe eine logarithmische Funktion annimmt, und Jordan hat bei seinem Ausdruck 4] als Näherung hiefür eine lineare Beziehung zugrunde legt, wurde bereits viel früher auch in der terrestrischen Strahlenbrechung dieser Veränderlichkeit der Temperatur mit der Höhe Beachtung geschenkt. So haben nach Helmert[15])

[15]) Helmert, Höhere Geodäsie, II. Bd. Ueber praktische Theorien. 1884. S. 590.

Villarceau 1860, Ibanez 1864 und auch Jordan schon 1876 Theorien der terrestrischen Refraktion unter der Voraussetzung ausgearbeitet, dass die Temperatur als Funktion der Höhe durch eine nach Potenzen derselben fortschreitende Reihe ausgedrückt wird. Deren Glieder sind bereits bei der 2. Potenz abzubrechen, während entsprechende Temperatur- und Barometerbeobachtungen dazu dienen, die Koeffizienten dieser Reihe zu bestimmen.

Jordan sucht in Zeitschr. f. Verm. 1898 S. 102 die aus der Höhe zu entwickelnde Temperaturfunktion auch auf das Nivellement zu übertragen und damit die frühere rohe Annahme einer mit der Höhe gleichmässig variierenden Temperatur zu verbessern. Er schlägt zu diesem Zwecke vor, mit dem Assmann'schen Aspirationsthermometer oder einem ähnlichen Instrument auf einer von der Sonne beschienenen Strasse oder Eisenbahn in Höhen von 0,1 0,2 0,3 . . . bis 5,0 m über dem Boden Lufttemperaturbestimmungen anzustellen und die Temperatur t in der Höhe h über dem Boden durch eine empirische Formel $t = t_0 + \alpha h + \beta h^2 + \ldots .$ zum Ausdruck zu bringen. Hieraus kann $\frac{dt}{dh} = \alpha + 2\beta h + \ldots .$ ermittelt und in den Ausdruck $n = -\frac{dt}{dh}$ der für den Koeffizienten der terrestrischen Strahlenbrechung gültigen Formel:

$$K = 0{,}2325 \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{1}{(1 + \alpha t)^2} \cdot (1 - 29.39\, n)$$

eingesetzt werden.

Diesem Vorschlag folgt scheinbar Hugershoff, auf dessen Refraktionsuntersuchungen wegen ihrer Bedeutung noch näher eingegangen werden soll.

In seiner Dissertation über „Zustand der Atmosphäre als Fehlerquelle im Nivellement“ [16]) pflichtet er der schon von Jordan vertretenen Anschauung bei, dass, wie besonders die vom Erdboden aus durch Leitung erfolgende, stetige Wärmeübertragung dies verlangt, in Bodennähe die isothermen Schichten der Atmosphäre als mit dem Gefälle der Erdoberfläche parallel verlaufend angenommen werden müssten. Bei seinen theoretischen Entwicklungen gelangt er zu dem Resultat, dass die durch konstante Refraktion

[16]) Doktordissertation der Technischen Hochschule Dresden. 1907.

bewirkten Fehlereinflüsse im Rück- und Vorblick des Nivellements sich folgendermassen darstellen lassen:

$$\triangle_r^{mm} 0{,}004288 \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{1}{(1+\alpha t)^2} \cdot \frac{Z^2}{\Delta^2 h} \int_{h=r}^{h=i} (h - r) f'(h)\, d h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5a]$$

$$\text{und } \triangle_v^{mm} 0{,}004288 \cdot \frac{B}{760} \frac{1}{(1+\alpha t)^2} \cdot \frac{Z^2}{\Delta^2 h} \int_{h=v}^{h=i} (h - v) f'(h)\, d h \quad . \quad . \quad . \quad 5b]$$

Hierin bedeuten B, α, t die bisher schon bekannten Grössen; mit z ist die Zielweite und mit Δh der Höhenunterschied bezeichnet. Ferner stellt die aus $t = f(h)$ abgeleitete Beziehung $f'(h) = \frac{d t}{d h}$ wieder das Mass der Temperaturänderung mit der um 1 m veränderten Höhe dar. Die Lattenablesung im Rückblick ist mit r, jene im Vorblick mit v bezeichnet; gleichzeitig bedeutet i die Instrumentenhöhe, während die gedachte Lattenablesung in dem beliebig angenommenen Punkt P der Visur bezw. Lichtkurve mit h benannt ist. Der Gesamteinfluss der konstanten Refraktion auf das Stationsergebnis lässt sich somit darstellen als:

$$\Delta^{mm} = \triangle r - \triangle v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6.]$$

Für den speziellen Fall, wo $r = v = i$ und somit $\Delta h = 0$ ist, also bei Nivellements auf horizontalem Gelände, wird auch $\Delta = 0$, was in plausibler Weise zutreffen muß.

Hinsichtlich der Richtigkeit obiger Ausdrücke für $\triangle r$ und $\triangle v$ in 5]a b findet Hugershoff, dass dieselben im Prinzip sich mit der Lallemand'schen Formel völlig decken. Um nun aus ihnen eine geschlossene Formel für Δ herzuleiten, macht Hugershoff bezüglich der Funktion $t = f(h)$ versuchsweise zuerst die Annahme: $t = a + b h$, wobei also die Temperatur durch eine lineare Beziehung zur Höhe dargestellt ist; daraus wird $f'(h) = b$.

Beim Einsetzen dieses Wertes in die Gleichungen 5]a b erhält man die beiden Fehlereinflüsse im Vor- und Rückblick als einander gleich, so dass $\Delta = 0$ werden würde. Bei der Annahme, dass die Temperatur sich linear mit der Höhe über dem Boden verändert, würde also nach der Hugershoff'schen Formel die Lichtkurve im Vor- und Rückblick symmetrisch verlaufen.

Mit Rücksicht auf dieses den Tatsachen jedoch völlig widersprechende Ergebnis gelangt Hugershoff zu dem Schlusse, dass, falls die Temperatur sich überhaupt als ganze rationale Funktion der Höhe darstellen lässt, diese Funktion mindestens vom 2. Grad sein müsse. Er macht daher die

2. Annahme: $t = a + b h^2$, deren Verwendung folgenden Ausdruck für Δ liefert:

$$\Delta_{mm} = 0{,}0003574 \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{1}{(1 + \alpha t)^2} \cdot z^2 \cdot b \cdot \Delta h \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7.]$$

Nach diesem gegenüber der Lallemand'schen Formel verhältnismässig einfachen Ausdruck ist also die Gesamtrefraktion Δ proportional:

a) wie schon allgemein gefunden war, dem Quadrate der Zielweite z;
b) dem Höhenunterschied Δh, so dass bei $\Delta h = 0$ auch $\Delta = 0$ wird, und
c) dem Koeffizienten b des Temperaturgesetzes, der gleich der Differenz der Temperatur in 1 m Höhe $= t_1$ und jener am Boden $= t_0$ zu setzen ist, also $b = t_1 - t_0$.

Durch diese letztere Beziehung erledigt sich in einfacher Weise auch die Vorzeichenfrage; ist b positiv, steigt also die Temperatur nach oben, wie dies in den ausgeführten Beobachtungen am frühen Morgen und teilweise auch abends gefunden wurde, so wird auch Δ positiv und umgekehrt. Das Vorzeichen von Δ wird somit in eindeutiger Weise durch jenes von b bestimmt. Hugershoff führte zur Erprobung seiner Refraktionsformel 7] ein allerdings nur 1,2 km langes Versuchsnivellement aus. Die dabei berechneten mittleren km-Fehler erfahren nach Berücksichtigung des gemäss seiner Theorie wirkenden Refraktionseinflusses tatsächlich eine gewisse Verbesserung.

Zum Schlusse der wissenschaftlichen Arbeit bringt Hugershoff als erweiterte Form des von ihm angewandten Temperaturgesetzes den Ausdruck $t = a + b h + c h^2$ in Vorschlag, zu dessen Verwendung die Beobachtung dreier Temperaturen für die Bestimmung der Konstanten a, b und c erforderlich wird.

Diese Temperaturfunktion mit 3 Temperaturen hat nun Verfasser bei einigen Teilstrecken des auf S. 15 Anmerkung 9 erwähnten Nivellements Freilassing—Reichenhall anzuwenden versucht. Das dabei gebrauchte Nivellierverfahren ist das gleiche, das später zur Untersuchung der Lallemand'schen Refraktionstheorie zur Verwendung kam. Auch die entsprechend der Hugershoff'schen Theorie für jeden Instrumentenstand erforderliche Beobachtung dreier Temperaturen, nämlich am Boden, in 1 m und 2 m Höhe, erfolgte in derselben Weise wie dort; nur musste hier mangels weiterer Thermometer der Assmann'sche Aspirationspsychrometer, wie dies auch Hu-

gershoff bei seinem Versuchsnivellement mit allerdings nur 2 Temperaturen ausgeführt, abwechselnd in die 3 Lagen umgehängt werden.

Dadurch dass, wie überhaupt für das ganze Nivellement, so auch für die 3 mit gleichzeitigen Temperaturbeobachtungen nivellierten Teilstrecken je ein Hin- und Rücknivellement zur Ausführung kam, ist es möglich, den Refraktionseinfluss auf die Differenz zweier solcher zusammengehöriger Nivellements zu bestimmen. Wenn damit naturgemäss auch keine Kontrolle für die Richtigkeit der Hugershoff'schen Theorie bezw. des von ihm vorgeschlagenen Temperaturgesetzes erzielt werden kann — hiezu wäre ja, um jeglichen Refraktionseinfluss auszuschalten, ein mit ganz kurzer Zielweite ausgeführtes, besonderes Bestimmungsnivellement der Teilstrecke notwendig gewesen —, so erscheint es immerhin als wertvoll, den Unterschied in der Refraktionswirkung aufzusuchen, je nachdem ein Temperaturgesetz mit 2 Temperaturen, also $t = a + bh^2$, oder ein solches mit 3 Temperaturen: $t = a + bh + c \cdot h^2$ zur Anwendung gelangt.

Nunmehr ist unter Benützung der Hugershoff'schen Integralformeln 5a] und 5b]:

A. für Temperaturgesetz $t = a + b\,h^2$ der Refraktionseinfluss $\Delta = k \cdot b$

B. für Temperaturgesetz $t = a + bh + ch^2$ d. Refraktionseinfl. $\Delta = k \cdot c$, wenn

$$k = 0{,}0003574 \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{1}{(1 + \alpha t)^2} \cdot z^2 \cdot \Delta h \text{ bedeutet.}$$

Die ausführliche Mitteilung der Beobachtungsergebnisse und des Rechnungsganges findet hier nur für die erste Teilstrecke statt, nämlich Freilassing bis Kilometer 2,3, während für die beiden übrigen Teilstrecken lediglich die Resultate angeführt werden sollen.

Die Wahl der ersten Teilstrecke für die Ausführung der Refraktionsbeobachtungen erfolgte deshalb, weil gerade bei dieser Nivellierung ein besonders schönes, noch nicht zu warmes Frühlingswetter mit zum Teil starkem Flimmern der Bilder herrschte, weshalb in der verhältnismässig grossen Differenz von 5,2 mm zwischen Hin- und Rücknivellement dieser Strecke wohl mit Recht systematische, auf Refraktionswirkung beruhende Fehlereinflüsse angenommen werden durften.

Die während eines Instrumentenstandes in den Höhen 0, 1 und 2 m über dem Boden mehrmals ausgeführten Temperaturbeobachtungen t_0 t_1 und t_2 ergeben folgende Mittelwerte:

1a) Hinnivellement Freilassing—km 2,3, steigend.

Instrumentenstände 1—18 vormittags.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_0^0	—0.8	2.8	3.6	3.7	4.0	4.5	4.8	6.5	6.5
t_1^0	—0.9	2.5	3.3	3.1	3.3	3.5	4.4	5.9	6.1
t_2^0	—.07	2.4	3.3	3.0	3.1	3.3	4.4	5.7	6.0

	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	6.3	6.9	7.2	7.5	7.1	7.0	6.7	8.2	7.8
	5.5	6.2	6.3	6.0	5.9	6.2	5.8	6.5	6.8
	5.3	5.8	6.3	5.3	5.4	6.2	5.3	6.1	6.1

Daraus Mitteltemperatur $t = 5^0$ bei Luftdruck $B = 721$ mm.

1b) Rücknivellement: km 2,3—Freilassing, fallend.

Instrumentenstände 1—18 nachmittags.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_0^0	8.4	8.8	8.2	8.0	8.2	7.9	6.6	6.7	7.6
t_1^0	6.7	7.3	6.6	6.8	6.7	6.9	6.3	6.0	6.8
t_2^2	5.7	6.4	5.9	5.9	6.3	6.4	5.9	5.7	6.2

	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	7.2	7.9	7.6	7.4	7.1	7.3	7.0	7.3	6.7
	6.9	7.7	7.2	7.1	6.6	7.0	6.7	6.9	6.6
	6.2	7.6	7.1	7.1	6.4	6.9	6.4	6.9	6.4

Daraus Mitteltemperatur $t = 7^0$ bei Luftdruck $B = 721$ mm (letzterer wie oben).

Zur Ableitung der refraktionären Grössen Δ sind nun folgende Werte von Δ h und z^2 zu ermitteln:

Freilassing — Km 2,3				Km. 2,3 — Freilassing			
Instr. Stand	Δh in m	Z in m	Z^2	Instr. Stand	Δh in m	Z in m	Z^2
1.	0.60	38.8	1505	1.	0.98	85.0	7225
2.	0.04	64.2	4122	2.	0.44	63.2	3994
3.	0.22	76.0	5776	3.	0.42	63.2	3994
4.	0.40	67.4	4543	4.	0.12	62.8	3994
5.	0.54	87.0	7569	5.	0.32	63.0	3969
6.	0.78	66.6	4436	6.	0,70	62.6	3919
7.	0.74	64.6	4173	7.	0.45	63.2	3994
8.	0.66	62.6	3919	8.	0.74	62.2	3869
9.	0.60	62.2	3869	9.	0.48	63.2	3994
10.	0.46	63.8	4070	10.	0.60	62.4	3894
11.	0.74	62.4	3894	11.	0.69	63.0	3969
12.	0.46	63.2	3994	12.	0.68	62.6	3919
13.	0.72	62.4	3894	13.	0.86	65.4	4277
14.	0.32	63.4	4020	14.	0.32	65.8	4330
15.	0.12	62.4	3894	15.	0.44	65.2	4251
16.	0.40	63.4	4020	16.	0.30	61.6	3795
17.	0.44	62.0	3844	17.	0.12	71.8	5155
18.	0.96	85.8	7362	18.	0.58	73.0	5329

Beim Einsetzen aller nunmehr bekannten Grössen B, α, t, Δh und z^2 in den Ausdruck für k auf S. 37 werden nun für die zwei verschiedenen Annahmen von $t = f(h)$ nachstehende Werte Δ erhalten:

A. Temperaturfunktion $t = a + bh^2$

mit Temperatur t_1 in 1 m Höhe | Es ist $t_0 = a$ und

mit Temperatur t_0 am Boden | $t_1 = a + b$, so dass $b = t_1 - t_0$

Freilassing — Km 2,3			Km 2,3 — Freilassing		
Instr. Stand	$b = t_1 - t_0$	Refr. Δ in mm	Instr. Stand	$b = t_1 - t_0$	Refr. Δ in mm
1	0.1°	0.03	1	1.7°	3.87
2	0.3	0.02	2	1.5	0.85
3	0.3	0.12	3	1.6	0.86
4	0.6	0.36	4	1.2	0.18
5	0.7	0.94	5	1.5	0.61
6	1.0	1.12	6	1.0	0.88
7	0.4	0.40	7	0.3	0.17
8	0.6	0.51	8	0.7	0.64
9	0.4	0.30	9	0.8	0.49
10	0.8	0.49	10	0.3	0.22
11	0.7	0.66	11	0.2	0.18
12	0.9	0.54	12	0.4	0.34
13	1.5	1.38	13	0.3	0.36
14	1.2	0.51	14	0.5	0.22
15	0.8	0.12	15	0.3	0.18
16	0.9	0.47	16	0.3	0.11
17	1.7	0.94	17	0.4	0.08
18	1.0	2.32	18	0.1	0.10
Gesamtrefraktionseinfluss für Hinnivell. [Δ] = — 11,2 mm			Gesamtrefraktionseinfluss für Rücknivell [Δ] = — 10,3 mm.		

B. Temperaturfunktion: $t = a + b\,h + c\,h^2$

mit Temperatur t_0 am Boden
mit Temperatur t_1 in 1 m Höhe
mit Temperatur t_2 in 2 m Höhe

Es ist $t_0 = a$

$t_1 = a + b + c$

$t_2 = a + 2\,b + 4\,c$, so dass

$$c = \frac{(t_0 - t_1) + (t_2 - t_1)}{2}$$

Freilassing — Km 2,3			Km 2,3 — Freilassing		
Instr. Stand	c	Δ in mm	Instr. Stand	c	Δ in mm
1	0.15	0.04	1	0.35	0.80
2	0.1	0.01	2	0.3	0.17
3	0.15	0.06	3	0.45	0.24
4	0.25	0.15	4	0.15	0.02
5	0.25	0.34	5	0.55	0.22
6	0.4	0.45	6	0.25	0.22
7	0.2	0.20	7	0.05	0.03
8	0.2	0.17	8	0.2	0.18
9	0.15	0.11	9	0.1	0.06
10	0.3	0.18	10	0.2	0.14
11	0.15	0.14	11	0.05	0.04
12	0.45	0.27	12	0.15	0.12
13	0.4	0.37	13	0.15	0.18
14	0.35	0.15	14	0.15	0.07
15	0.4	0.06	15	0.1	0.06
16	0.2	0.10	16	0	0
17	0.65	0.36	17	0.2	0.04
18	0.15	0.35	18	0.05	0.05
Gesamtrefraktionseinfluss für Hinnivell. $[\Delta] = -3{,}5$ mm.			Gesamtrefraktionseinfluss für Rücknivell. $[\Delta] = -2{,}6$ mm.		

Sind h_1 und h_2 die beim Hin- und Rücknivellement gefundenen Höhenunterschiede, während $H = \frac{h_1 + h_2}{2}$ den mittleren Höhenunterschied bedeutet, so erhält man in einer Zusammenstellung:

	Temp.-Ges. A	Temp.-Ges. B
Refraktionseinfluss auf $h_1 - h_2$	— 0.9mm	—0.9mm
„ „ H	—10.8 „	—3.1 „

Dabei:
mittl. t. = 6°
mittl. n = 0,8°
Höhenunterschied
$\Delta h = 6{,}6$ m
Nivell. Strecke
$L = 2{,}3$ km

Konstatiert soll werden, dass sämtliche beobachtete Temperaturen nach oben hin eine Abnahme zeigen; wir haben es daher hier mit der normalen Re-

fraktionswirkung im Nivellement zu tun, bei welcher der Zielstrahl zur Erde hin abgelenkt wird, somit eine negative Krümmung erhält. Die Folge davon ist, dass auch der Refraktionseinfluss Δ und damit $[\Delta]$ bei vorstehenden Betrachtungen durchwegs für Hin- und Rücknivellement negatives Vorzeichen besitzen muss, was in anderer Weise ausgedrückt, bedeutet: „Wird bei gewöhnlicher Refraktion deren Einfluss im Nivellement nicht berücksichtigt, so werden sämtliche Höhenunterschiede als zu gross gefunden."

Diese durch einfache Ueberlegung sich ergebende Tatsache lässt sich kurz durch folgende Skizze veranschaulichen. In derselben seien 1 . . 4 Instrumentenstände in steigendem Gelände; die punktierten Kurven stellen die unsymmetrischen Lichtkurven im Vor- und Rückblick dar. Betrachtet man nur den im ersten Instrumentenstand vorhandenen Höhenunter-

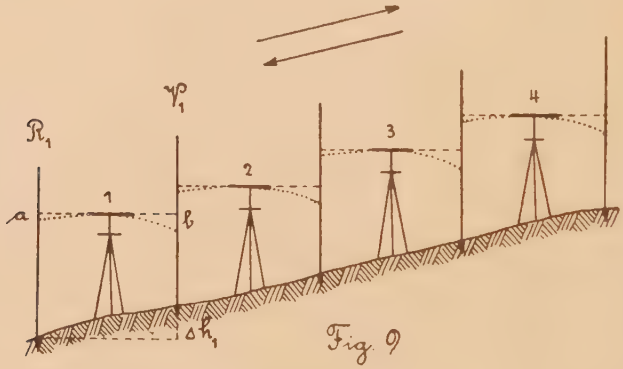


Fig 9

schied Δh_1 der beiden Lattenstandorte R_1 und V_1, und sind a, bezw. b die Abweichungen der Lichtkurve von der horizontalen Ziellinie in den beiden entgegengesetzten Visuren, so ist:

$$\Delta h_1 = (R_1 - a) - (V_1 - b) = R_1 - V_1 + (b - a).$$

Da aber infolge der stärkeren Krümmung des bergwärts gerichteten Zielstrahls im Vorblick $b > a$, so wird im Ausdruck für Δh_1 der durch Refraktion bewirkte Fehlereinfluss $b - a$ positiv, und Δh_1 selber muss daher, ob nun bergauf oder bergab nivelliert wird, immer zu gross gefunden werden. Analog gilt dies auch für die übrigen Stände.

Im Anschluss hieran sollen nunmehr gleich die Ergebnisse der auf den beiden anderen Teilstrecken: km 2,3—km 4,0 und km 8,8—Piding durchgeführten Nivellements mitgeteilt werden, nämlich:

2. für die Strecke km 2,3—km 4,0

	Temp.-Ges. A	Temp.-Ges. B	Dabei:
			mittl. $t = 1{,}8^0$
			mittl. $n = 0{,}3^0$
Refraktionseinfluss auf $h_1 - h_2$	—0.3 mm	—0.1 mm	Höhenunterschied $\Delta h = 4{,}6$ m
„ „ H	—3.0 „	—1.2 „	Nivell. Strecke $L = 1{,}7$ km

3. für die Strecke km 8,8 —Piding

	Temp.-Ges. A	Temp.-Ges. B	Dabei:
			mittl. $t = 4{,}2^0$
			mittl. $n = 0{,}4^0$
Refraktionseinfluss auf $h_1 - h_2$	—5.5 mm	—1.0 mm	Höhenunterschied $\Delta h = 7{,}5$ m
„ „ H	—4.9 „	—1.6 „	Nivell. Strecke $L = 2{,}0$ km

Betrachtet man die verschiedenen Ergebnisse, so ist sofort ersichtlich, dass der aus beiden Annahmen für das Temperaturgesetz berechnete Refraktionseinfluss sich für die erste Strecke als am grössten ergibt, während er für die 2. und 3. Strecke entsprechend der bei ihrer Nivellierung herrschenden tieferen Temperatur und insbesondere der geringeren Temperaturgradienten n kleiner ausfallen musste. Ferner bewirkt Temperaturgesetz A für den mittleren Höhenunterschied H durchwegs einen 3 mal so grossen Refraktionseinfluss gegenüber jenem, welcher bei Verwendung der Temperaturfunktion B erhalten wird. Was nun den Refraktionseinfluss auf die Höhendifferenz des Hin- und Rücknivellements betrifft, so gestaltet sich derselbe für beide Temperaturgesetze bei der 1. und 2. Strecke annähernd gleich. Bei der 3. Strecke dagegen fällt die Refraktionswirkung für Temperaturgesetz A über 5 mal so gross aus als jene, die sich bei Temperaturgesetz B ergibt. Verfasser hat für die erste Strecke gemäss den Hugershoff'schen Formeln versuchsweise auch das Temperaturgesetz: $t = a + bh^2 + ch^4$, das ebenfalls die Messung dreier Temperaturen verlangt, angewendet und dabei naturgemäss noch grössere Fehlereinflüsse als die oben angeführten erhalten.

Fragt man nun, welche von den beiden Annahmen für die Temperaturfunktion den tatsächlichen Verhältnissen besser entspricht, so ist diese Frage ohne weitere umfangreiche Beobachtungen nicht zu entscheiden. Obige Beobachtungsergebnisse sprechen allerdings mit einiger Wahrscheinlichkeit für die Temperaturfunktion B.

Das rein quadratische Temperaturgesetz $t = a + b h^2$, das Hugershoff angewendet, würde bei unserer 1. Strecke für den mittleren Höhenunterschied bereits einen Refraktionseinfluss von 11 mm bewirken, welcher Betrag jedoch mit Rücksicht auf die im allgemeinen niedere Temperatur sowie den nur geringen Höhenunterschied bei dieser Strecke mit durchschnittlich 0,3% Steigung als zu hoch erscheint. Zwar weist der Refraktionseinfluss für das gleiche Temperaturgesetz bei den anderen Strecken geringere Beträge auf; allein dies ist infolge der hier wenig voneinander abweichenden Temperaturen und Höhenunterschiede lediglich in den durchschnittlich ebenfalls geringeren Temperaturgradienten n begründet, wie folgender Vergleich beweist:

	Strecke 1	Strecke 2	Strecke 3
Refraktionseinfluss auf H bei Temperaturgesetz A	-10.8mm	—3.0mm	—4.9mm
Refraktionseinfluss auf H bei Temperaturgesetz B	—3.1 „	—1.2 „	—1.6 „
Durchschnittliches n (für 1 m Höhenzunahme)	0.8°	0.3°	0.4°

Immerhin können hinsichtlich der Richtigkeit des einen oder anderen Temperaturgesetzes bis jetzt infolge mangelnden Beobachtungsmaterials nur Vermutungen angestellt werden, und es erscheint überhaupt fraglich, ob die Beziehungen zwischen Temperatur und Höhe als ganze rationale Funktion sich darstellen lassen. Verfasser kommt zu diesem Schluss, da es leider nicht gelang, die mittels Temperaturgesetz A und B berechneten Refraktionseinflüsse auch nur annähernd mit den auf S. 25 beobachteten Refraktionsfehlern der Höhenunterschiede in Einklang zu bringen. Zur empirischen Bestimmung einer besser den Tatsachen entsprechenden, mehr allgemein gültigen Temperaturfunktion könnte man auf folgendem Wege gelangen:

Auf einem geeigneten Gelände wären einige verschieden grosse Höhenunterschiede zwischen etwa 1—1 1/2 km voneinander entfernten, gut versicherten Bolzen wiederholt zu nivellieren. Um dabei möglichst ungleichartige Witterungseinflüsse studieren zu können, ist notwendig, dass diese stets nach dem gleichen Verfahren durchzuführenden Nivellements zu verschiedenen Tages- und Jahreszeiten jedesmal an mehreren aufeinander folgenden Tagen alle 3—4 Stunden mit gleichzeitigen Temperaturbeobachtungen in verschiedenen Höhen zur Ausführung kommen würden. Bestimmt man nun mittels eines besonderen, sorgfältig ausgeführten Vornivellements, bei welchem zur Vermeidung aller Refraktionseinflüsse nur kurze Zielweiten von vielleicht 15—20 m verwendet werden sollen, möglichst fehlerfreie Werte der Höhen-

unterschiede, so ist man beim Vergleich derselben mit den durch die Versuchsbeobachtungen gefundenen Werten in der Lage, die jeweiligen Refraktionseinflüsse mit genügender Sicherheit zu finden.

Eine Würdigung derselben mit den gleichzeitigen Temperaturbeobachtungen wird dann gestatten, auf die den Nivellementsergebnissen entsprechenden Temperaturgesetzen zu schliessen. Zweckmässig wäre es hiebei, zur Kontrolle der verwendeten Fixpunkte das den Refraktionsbeobachtungen vorausgehende Nivellement der einzelnen Bolzen mindestens einmal, nach Abschluss der gesamten Feldarbeit zu wiederholen.

Die auf vorhergehender Seite erwähnte Unstimmigkeit zwischen Beobachtung und Rechnung wird darin begründet sein, dass, wie bei den Refraktionsformeln von Lallemand und Jordan auch bei der Hugershoff'schen Formel, die ja diesen beiden Formelausdrücken symmetrisch gebaut ist, die im Laufe des Tages schwankende Temperatur nicht die ihr zukommende Berücksichtigung gefunden hat.

IV. Bedeutung der Zielhöhe und Temperatur für die Refraktionswirkung.

Bei allen bisherigen Refraktionsbeobachtungen wurde versucht, die Grösse der Refraktionsfehler in Beziehung zur Tageszeit, zur Temperatur und zu den Temperaturgradienten zu bringen, bezw. dieselben aus beobachteten Werten der letzteren abzuleiten.

Keineswegs aber wurde dabei auf die Zielhöhe-, d. i. Höhe der Lattenablesung über dem Boden Rücksicht genommen, wohl in der Annahme, dass diese für den Einfluss der Refraktion kaum von Bedeutung sein werde.

Die Unrichtigkeit dieser Anschauung wird nun im folgenden nachgewiesen und gezeigt, dass die Zielhöhe wohl geeignet ist, einen nicht unwesentlichen Einfluss auf die Grösse der Refraktion im Nivellement auszuüben. Ueber die Anordnung der ausgeführten Feldbeobachtungen ist zunächst folgendes zu bemerken:

Auf dem Versuchsgelände bei Moosach wählte Verfasser im Umkreis eines geeigneten Standorts J in Entfernungen von 60, 80 und 100 m je 8 Fixpunkte derart, dass ihre Höhenlage verschieden und in allen drei Entfernungen ein Gesamthöhenunterschied von 2,4—2,5 m vorhanden war. Cha-

rakteristisch für die Lage der Punkte 1—8 ist ferner, dass für alle 3 Zielweite das Ansteigen von den am tiefsten liegenden Punkten 1 zu den höchstge legenen Punkten 8 ein gleichmässiges war und von Punkt zu Punkt 0,3—0,4 m betrug. Die Oberfläche des Versuchsgeländes besteht im allgemeinen au grobem Kies und besitzt nur spärlichen Graswuchs.

Denkt man sich nun diese $3 \times 8 = 24$ Punkte durch zweckmässig ausge führte Nivellements miteinander verbunden und so ihre gegenseitige Höhen lage gut bestimmt, so können durch mehrmals am Tage wiederholte Beob

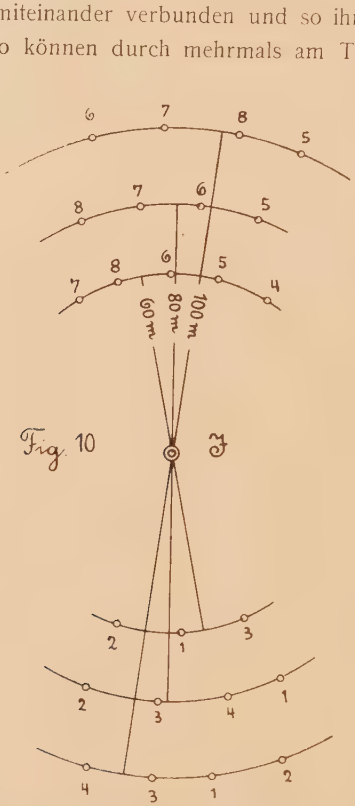


Fig. 10

achtungen die durch Refraktion bewirkten Aenderungen der einzelnen Zielhöhen gefunden werden. Hiedurch wird die Untersuchung darüber ermöglicht, ob und in welcher Weise sich ein Einfluss der Zielhöhe auf die Refraktionsgrösse äussert.

Die Beobachtungsmethode ist im Wesen die gleiche,[17]) welche bei der Untersuchung der Lallemand'schen Refraktionsformel verwendet wurde.

[17]) Die Wahl dieses Verfahrens für fortlaufende und auch bei heisser Tageszeit auszuführende Zielhöhenbeobachtungen wurde bereits auf S. 14 begründet.

Unter Benutzung desselben Nivellierapparates wurden von dem unverändert beibehaltenen Instrumentenstandort J aus für jede Beobachtungsreihe, deren 8 im Tage zur Ausführung kamen, stets in der gleichen Reihenfolge die Zielhöhen sämtlicher 8 Punkte in 60 m, in 80 m und schliesslich in 100 m Entfernung beobachtet. Eine solche Beobachtungsreihe mit 24 Punkten und 48 Lattenablesungen nahm jedesmal durchschnittlich eine Stunde Zeit in Anspruch. Die Temperaturmessung erfolgte hiebei wieder mit 3 übereinander befindlichen Thermometern, deren Ablesungen für jede Zielhöhenbeobachtung gemittelt wurden.

Zur Gewinnung möglichst grosser Unterschiede in den Ergebnissen kamen die Beobachtungen an zwei Tagen mit ungleichen Witterungsverhältnissen zur Ausführung. Am ersten Tag herrschte warmes, klares und ziemlich windstilles Wetter mit starkem Sonnenschein, so dass die Differenz zwischen höchster und tiefster Temperatur $+31^0 - 16^0 = 15^0$ betrug. Der zweite Tag dagegen war kälter, bei grösstenteils bedecktem Himmel und lebhafterem Wind. An diesem Tag war die höchste und tiefste Temperatur $+15^0$ und $+8^0$, woraus für diese Beobachtungen ein nur halb so grosser Temperaturunterschied wie am ersten Tag sich ergibt.

Die folgenden Koten der 24 Punkte sind alle auf den früheren Nullpunkt (S. 18). reduziert. Wie dort, soll auch hier der Einfluss der Erdkrümmung gleich bei den Koten berücksichtigt werden, so dass als reduzierte Werte für dieselben sich ergeben:

Zielw.	Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8	
60 m	+2.2413 −3	+2.0139 −3	+1.6815 −3	+1.3602 −3	+0.9787 −3	+0.5932 −3	+0.1639 −3	−0.1897 −3	Erdkrümmung
80 „	+2.2345 −5	+1.9944 −5	+1.7411 −5	+1.4938 −5	+1.0062 −5	+0.5871 −5	+0.1868 −5	−0.1091 −5	„
100 „	+2.0894 −8	+1.8943 −8	+1.6434 −8	+1.3079 −8	+0.9321 8−	+0.5208 −8	0.0000 −8	−0.4457 −8	„

Aus den beobachteten Zielhöhen und den reduzierten Koten erhält man wieder die Refraktionsfehler, mit denen zur Erleichterung der Uebersichtlichkeit gleich die Ergebnisse der entsprechenden Temperaturbeobachtungen verbunden werden, also:

Warmer Tag.

7 Uhr morgens.

60 m Zielweite:	Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
Gem. Horiz.	1.2011	1.2011	1.2011	1.2011	1.2011	1.2011	1·2011	1.2011
Zielhöhe	0.0804	0.1941	0.3605	0.5213	0.7119	0.9046	1.1195	1.2958
	1.1207	1.0070	0.8406	0.6798	0.4892	0.2965	0.0816	—0.0947
beob. Cote	2.2414	2.0140	1.6812	1.3596	0.9784	0.5930	0.1632	—0.1894
gegeb. Cote	2.2410	2.0136	1.6812	1.3599	0.9784	0.5929	0.1636	—0.1900
Refraktion	+0.4 mm	+0.4	0	—0.3	0	+0.1	—0.4	+0.6
Temp. a. Boden	14.2°	14.2	13.8	14.9	14.8	14.7	14·6	14.6
„ in 1 m	16.8°	17.2	16.6	17.5	17.4	17.4	17.2	17.3
„ in 2 m	16.0°	16.3	16.0	16.6	16.5	16.5	16.3	16.5
Mittel	15.7°	15.9	15.5	16.3	16.2	16.2	16.0	16.1

80 m Zielweite:	Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
Gem. Horiz.	1,2011	1.2011	1.2011	1.2011	1.2011	1.2011	1.2011	1.2011
Zielhöhe	0.0844	0.2045	0.3309	0.4544	0.6985	0.9083	1.1085	1.2566
	1.1167	0.9966	0.8702	0.7467	0.5026	0.2928	0.0926	—0.0555
beob. Cote	2.2334	1.9932	1.7404	1.4934	1.0052	0.5856	0.1852	—0.1110
gegeb. Cote	2.2340	1.9939	1.7406	1.4933	1.0057	0.5866	0.1863	—0.1096
Refraktion	—0.6 mm	—0.7	—0.2	+0.1	—0.5	—1.0	—1.1	—1.4
Temp. a. Boden	15.0°	15.4	15.2	15.0	15.9	15.7	15.6	15.4
„ in 1 m	17.5°	18.4	17.9	17.6	18.7	18.3	18.3	18.4
„ in 2 m	16.8°	17.6	17.3	16.9	17.8	17.5	17.6	17·6
Mittel	16.4°	17.1	16.8	16.5	17.5	17.2	17.2	17.1

100 m Zielweite:	Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
Gem. Horiz.	1.2011	1.2011	1.2011	1.2011	1.2011	1.2011	1.2011	1.2011
Zielhöhe	0.1580	0.2555	0.3813	0.5487	0.7362	0.9426	1.2028	1.4253
	1.0431	0.9456	0.8198	0.6524	0.4649	0.2585	— 0.0017	—0 2242
beob. Cote	2.0862	1.8912	1.6396	1.3048	0.929[illegible]	0.5170	—0.0034	—0.4484
gegeb. Cote	2.0886	1.8935	1.6426	1.3071	0.9313	0.5200	—0.0008	—0.4465
Refraktion	—2.4 mm	—2.3	—3.0	—2.3	—1.5	—3.0	—2.6	—1.9
Temp. a. Boden	16.9°	16.7	17.2	17.4	19.0	17.7	18.2	18.6
„ in 1 m	20.9°	20.9	20.6	20.8	21.5	20.8	21.1	21.3
„ in 2 m	18.4°	18.4	19.0	19.2	19.7	19.3	19.6	19.7
Mittel	18.7°	18.7	18.9	19.1	20.1	19.3	19.6	19.9

Für die folgenden Tageszeiten werden nur mehr die auf analoge Weise gefundenen Werte der Refraktionsfehler f und der mittleren Temperaturen t angegeben, also für:

$8^1/_2$ Uhr morgens.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	−1.0	−0.8	−0.4	−1.1	−0.6	−0.1	−0.6	+0.2
	t^0	22.3	22.3	22.2	22.6	22.6	22.7	22.4	22.6
80 m	f mm	−2.0	−1.1	−1.8	−1.3	−0.5	−0.8	−1.1	−1.4
	t^0	22.5	23.3	23.3	22.9	23.5	23.5	23.6	23.4
100 m	f mm	−3.8	−2.9	−4.0	−3.3	−2.1	−2.8	−2.4	−1.7
	t^0	23.3	23.3	23.6	23.8	24.1	23.8	23.9	24.0

10 Uhr vormittags.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	−1.0	−1.8	−1.8	−1.1	−0.8	−1.3	−0.6	−1.0
	t^0	27.0	27.3	26.5	26.5	26.6	26.9	26.8	27.4
80 m	f mm	−3.2	−2.7	−3.2	−2.3	−1.9	−1.2	−1.3	−2.6
	t^0	26.9	26.7	26.8	27.0	27.1	27.6	27.7	27.0
100 m	f mm	−4.6	−5.7	−5.6	−4.5	−2.7	−3.8	−2.8	−4.1
	t^0	27.7	27.4	27.7	27.5	27.6	27.4	27.8	27.2

$11^1/_2$ Uhr mittags.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	−1.6	−1.0	−2.6	−1.3	−0.8	−1.7	−2.2	−1.0
	t^0	28.4	28.3	29.0	28.0	27.7	27.9	28.3	27.9
80 m	f mm	−3.8	−3.3	−2.6	−3.5	−2.1	−1.6	−2.1	−1.8
	t^0	27.9	27.7	27.9	27.8	28.0	27.9	27.3	27.8
100 m	f mm	−5.6	−6.1	−6.0	−4.3	−2.5	−3.0	−2.6	−3.1
	t^0	28.2	28.6	28.6	29.1	28.4	28.5	28.2	28.3

1 Uhr mittags.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	—2.2	—2.4	—1.8	—1.3	—1.2	—2.3	—1.0	—1.4
	t⁰	30.1	29.8	30.4	29.7	29.6	29.6	29.8	29.5
80 m	f mm	—4.0	—3.3	—3.4	—2.7	—1.5	—1.4	—1.9	—2.4
	t⁰	30.7	30.9	30.7	30.6	30.1	30.0	30.1	30.8
100 m	f mm	—5.2	—6.1	—6.2	—5.1	—3.1	—3.2	—1.8	—4.1
	t⁰	30.3	30.2	30.5	30.5	30.8	30.3	30.6	30.9

$2^1/_2$ Uhr nachmittags.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	—1.6	—1.2	—2.2	—1.1	—0.4	—0.3	—0.6	—0.4
	t⁰	30.9	30.5	30.9	30.9	30.8	30.8	30.5	30.2
80 m	f mm	—3.0	—0.9	—1.4	—3.1	—0.3	—0.6	—0.7	—1.6
	t⁰	30.8	31.0	30.7	30.7	30.5	30.5	29.9	30.5
100 m	f mm	—3.4	—4.5	—3.6	—2.9	—1.3	—1.6	—1.0	—0.9
	t⁰	29.8	30.1	29.7	30.0	30.0	30.2	30.0	29.8

4 Uhr nachmittags.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	—1.2	—1.0	—0.8	—1.5	—0.4	—0.5	—0.8	0
	t⁰	29.3	29.1	29.3	29.6	29.5	29.5	29.6	29.9
80 m	f mm	—2.0	—1.1	—1.4	—1.9	—0.7	—0.4	—0.9	—1.0
	t⁰	29.7	30.2	30.1	29.8	29.4	29.6	29.8	30.2
100 m	f mm	—2.4	—2.5	—2.6	—2.7	—1.3	—1.8	—1.4	—1.3
	t⁰	29.0	29.4	29.0	28.8	27.9	28.5	28.2	28.1

$5^1/_2$ Uhr nachmittags.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	0	−0.4	−0.2	−1.1	−0.2	−0.7	−0.2	+0.4
	t^0	27.3	27.2	27.3	27.0	27.1	27.1	27.1	27.2
80 m	f mm	−1.0	−0.1	0	−0.1	−0.1	0	−0.5	−0.3
	t^0	26.9	26.6	26.7	26.8	25.6	25.8	26.3	26.4
100 m	f mm	+1.6	+1.3	+0.4	+1.3	−1.3	−1.2	−0.4	−0.5
	t^0	25.1	25.5	24.8	24.4	23.7	24.2	24.0	23.9

Im Anschluss hieran sind gleich die am 2. Beobachtungstag mit völlig veränderten Witterungsverhältnissen erhaltenen Werte f und t aufgeführt.

Kalter Tag.

7 Uhr morgens.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	−0.2	−0.6	−0.6	−1.5	−0.6	−0.5	−0.4	−0.6
	t^0	8.8	8.5	8.4	9.5	9.2	9.0	8.7	8.8
80 m	f mm	−1.8	−0.7	−0.4	−0.1	−1.3	−1.8	−0.3	−1.4
	t_0	9.7	9.2	9.2	9.5	10.2	10.3	10.2	9.4
100 m	f mm	−2.8	−1.9	−2.6	−1.3	−1.3	+1.0	+1.2	−0.3
	t^0	10.5	10.2	10.6	10.7	10.7	10.5	10.6	10.5

$8^1/_2$ Uhr morgens.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	—0.8	—0.8	—0.8	—2 1	—.08	—2.5	—1.6	—0.8
	t^0	13.8	13.9	13.2	13.5	13.3	13.7	13.6	13.6
80 m	f mm	—2.2	—1.1	—0.8	—1.3	—1.1	—0.6	—0.3	—1.2
	t^0	13.8	13.0	13.2	13.4	12.7	12.6	12.6	12.9
100 m	f mm	—2.8	—2.5	—3.0	—1.9	—1.5	—1.2	—1.2	—1.1
	t^0	12.5	12.3	12.5	12.4	12.2	12.4	12.3	12.2

10 Uhr vormittags.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	—0.8	—1.0	—1.4	0.5	—0.4	—0 5	+0.2	—0.2
	t^0	13.2	13.3	13.3	12.5	12.6	12.8	13.1	13.0
80 m	f mm	—1.2	—1.1	—0.8	—0.5	—0.9	—0.8	+0.1	—0.8
	t^0	12.4	12.3	12.2	12.3	12.2	12.2	12.2	12.2
100 m	f mm	—0.8	—1.7	—1.4	—1.5	—1.3	—2.0	—1.2	—0.7
	t^0	12.1	12.2	12.0	12.0	12.0	12.0	12.0	12.0

$11^1/_2$ Uhr vormittags.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	—1.2	—1.0	—1.0	—1.5	—1.2	—0.7	0	0
	t^0	13.1	13.2	13.3	13.6	13.6	13.6	13.0	13.2
80 m	f mm	—3.4	—0.1	+0.2	—0.9	—0.5	—1.0	—1.3	—0.4
	t^0	14.0	14.2	13.9	13.8	14.1	14.3	14.3	14.5
100 m	f mm	—4.4	—4.7	—2.4	—1.9	—2.3	—0.2	—1.2	—1.1
	t^0	13.7	13.9	13.7	13.9	14.0	13.9	13.7	13.8

1 Uhr mittags.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	—0.6	—0.4	—1.0	—0.7	—0.6	—0.3	+0.2	—0.2
	t^0	13.1	13.1	12.9	13.5	13.3	13.2	13.2	13.1
80 m	f mm	—1.6	—0.1	0	+0.3	—.09	+1.2	—0.5	- 0.4
	t^0	13.5	13.6	13.7	13.7	13.9	13.9	13.7	13.7
100 m	f mm	—1.8	—1.7	—1.8	—0.3	—1.7	+0.8	—0.4	—0.7
	t^0	13.8	13.7	13.6	13.6	13.4	13.5	13.5	13.5

$2^1/_2$ Uhr nachmittags.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	—1.4	—0.4	—1.4	—0.1	+0.5	—0.1	+0.6	+0.2
	t^0	14.1	14.0	14.2	13.9	13.8	13.8	14.0	13.9
80 m	f mm	—1.8	— 0.3	0	—0.5	—0.9	—0.6	+0.1	—.04
	t^0	13.9	13.8	13.8	13.8	13.5	13.6	13.7	13.8
100 m	f mm	—1.6	—2.3	—1.0	—0.7	—0.9	0	—1.2	—0.7
	t^0	13.8	13.7	13.9	13.8	14.2	13.9	13.9	14.0

4 Uhr nachmittags.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	—0.6	—0.6	—1.0	—0.5	+0.4	—0.5	+0.4	0
	t^0	14.0	13.9	14.0	13.8	13.9	13.9	13.9	13.9
80 m	f mm	—1.0	—0.7	0	—0.3	—0.5	—0.6	—0.3	—0.8
	t^0	13.7	13.7	13.8	13.7	13.8	13.7	13.7	13.7
100 m	f mm	—0.2	—0.3	—1.0	+0.1	—0.1	—0.8	—0.8	+0.1
	t^0	13.8	13.8	13.8	13.7	13.4	13.6	13.6	13.4

$5^1/_2$ Uhr nachmittags.

Zielweite		Punkt 1	2	3	4	5	6	7	8
60 m	f mm	—0.2	—0.4	—0.4	—0.3	+0.4	—0.1	+0.2	—0.2
	t^0	12.7	12.7	12.8	12.6	12.6	12.7	12.7	12.7
80 m	f mm	—.02	—0.3	+0.2	+0.3	+0.3	+1.0	—0.3	—1.2
	t^0	12.6	12.5	12.5	12.5	12.3	12.4	12.4	12.5
100 m	f mm	+1.0	+1.5	—1.2	+2.1	—.03	0	—0.8	+1.9
	t^0	12.2	12.3	12.2	12.1	12.0	12.2	12.1	12.0

Mit vorstehenden Beobachtungsergebnissen für die voneinander abhängigen Grössen: Refraktionsfehler, Temperatur, Zielhöhe, Zielweite, Beobachtungszeit usw. sollen im folgenden einige Betrachtungen angestellt werden, wozu zwecks besserer Veranschaulichung fast durchwegs graphische Darstellung gewählt wird. Vorerst aber sei bezüglich der Temperaturbeobachtung noch bemerkt:

Selbst bei nur flüchtiger Würdigung der Tabellen fällt es schon auf, dass die Temperaturen bei der Beobachtung von Punkt zu Punkt statt im allgemeinen eine stetige Zu- oder Abnahme zu zeigen, öfters eine sprungweise Aenderung erfahren. Begründet ist diese Erscheinung darin, dass, um Verwirrungen zu vermeiden, die Fixpunkte für die einzelnen Zielweiten nicht ihrer Zielhöhe, d. h. der vorstehenden Anordnung 1—8 nach, sondern gemäss ihrer natürlichen Reihenfolge im Horizont[18]) beobachtet wurden; das bisweilen auftretende Springen der Temperatur ist somit nur ein scheinbares.

1. Darstellung und Diskussion der Lichtkurven.

S. 56—58 und 60—62 zeigen die Darstellung der Lichtkurven, wie sie für die einzelnen Tageszeiten von 7 Uhr morgens bis 6 Uhr abends und für die verschiedenen Zielhöhen in den Punkten 1 bis 8 beobachtet wurden. Dabei beträgt das Minimum der Zielhöhe für Punkt 1 nur 0,2—0,3 m, während sie für Punkt 8 einen grössten Wert von rund 2,6 m erreicht. Die

[18]) Siehe Skizze auf S. 46 Fig. 10.

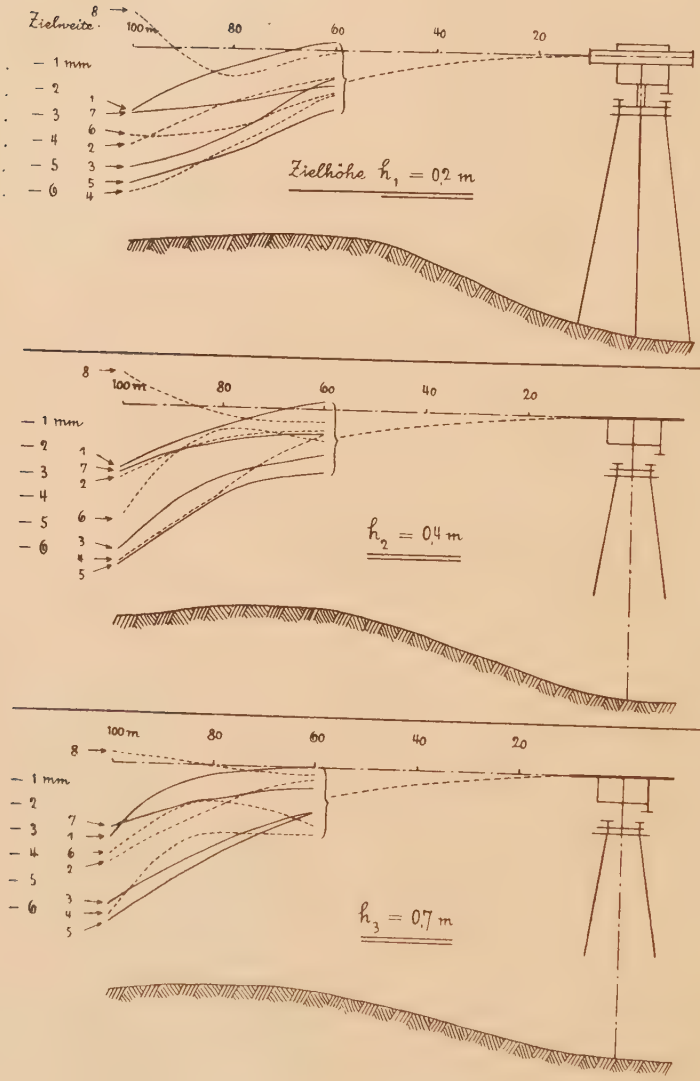
Bezeichnung der aus den jeweiligen Refraktionsfehlern für die einzelnen Zielweiten zu 60, 80 und 100 m abzuleitenden Lichtkurven, die also nur für die Punkte von annähernd gleicher Zielhöhe gelten, findet mittels verschiedener Stricharten und Zahlen statt. Bei 20 m und 40 m Zielweite sind keine Beobachtungen ausgeführt, so dass der Kurvenverlauf für diese Entfernungen nicht bekannt ist. Immerhin kann derselbe näherungsweise aus dem übrigen Teil der Kurvenbilder bestimmt und, wie in der Zeichnung angedeutet, mit dem Instrumentenstand J verbunden werden. Gleichzeitig kommt das Bodenprofil (M. d. L. = 1 : 1000, M. d. H. = 1 : 67) zur Darstellung, das mit veränderlicher Zielhöhe von Punkt 1—8 eine stetige Formänderung erfährt.

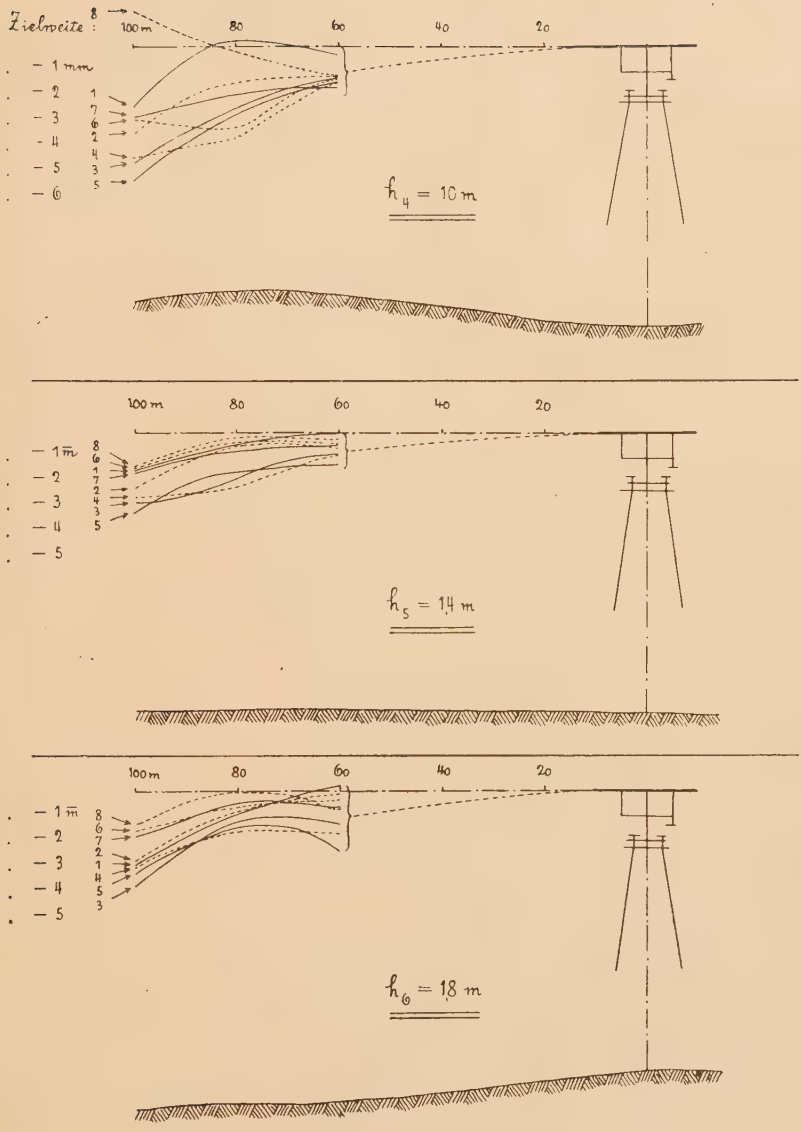
Nebenstehende, auf S. 56—58 dargestellte Lichtkurven, die nach Tageszeit und Zielhöhe zunächst für den warmen Beobachtungstag ausgeschieden sind, zeigen im grossen und ganzen wieder dasselbe Verhalten, das bereits aus den Refraktionsbeobachtungen auf S. 19—21 abgeleitet wurde. Wieder besitzen die Refraktionsfehler, die auch hier annähernd der 2. Potenz der Zielweite wachsen, morgens und abends ihren kleinsten Wert, wobei sie in einzelnen Fällen selbst entgegengesetztes Vorzeichen annehmen; andererseits erreichen sie hier ebenfalls zu Mittag, also zur Zeit der höchsten Temperatur, einen grössten Wert.

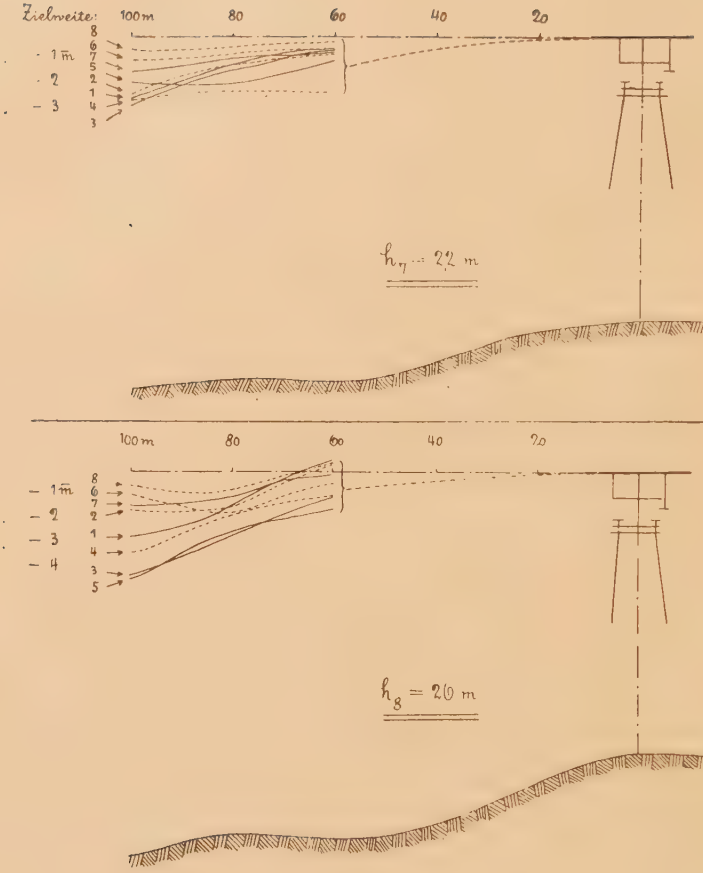
Neben diesem allgemeinen Verhalten der Refraktionsfehler gestattet aber die graphische Darstellung, die Beziehungen der Lichtkurve bezw. der Refraktionswirkung zu den verschiedenen Zielhöhen zu erkennen. Bei Betrachtung der Lichtkurven von Punkt 1 bis Punkt 8 ist deutlich ersichtlich, wie mit wachsender Zielhöhe für alle Tageszeiten und damit auch für die entsprechenden Tagestemperaturen, die Refraktionsfehler kleiner werden, der Refraktionseinfluss also allgemein zurückgeht. Somit erfahren, wie schon auf S. 23 erwähnt, infolge dieser Asymmetrie der Lichtkurve die talwärts gerichteten Zielstrahlen gegenüber den dem steigenden Gelände zugewandten Visuren eine bisweilen wesentlich geringere Brechung. Dieser Brechungsunterschied kann beispielsweise selbst den doppelten Wert einer einzelnen Brechungsgrösse erreichen, wie sich beim Vergleich der Maximalablenkung für Zielhöhe bei Punkt 1 und 2 zu jener in Punkt 7 ergibt. Während, wie aus der Darstellung zu ersehen ist, für die Zielhöhe = 0,4 m in Punkt 2 die Maximalrefraktion bei 100 m Zielweite bereits rund 6 mm beträgt, erreicht dieselbe für die Zielhöhe 2,2 m in Punkt 7 unter sonst gleichen Verhältnissen ungefähr nur die Hälfte dieses Betrages.

Allerdings weisen die Beobachtungen auch einzelne kleine Unstimmigkeiten auf. So trifft es mehrmals zu, dass im Widerspruch zu der allgemein

Warmer Tag, Temperatur 16° - 30° C




Zielweite :
100 m
80
60
40
20
— 1 mm
— 2
— 3
— 4
— 5
— 6
$h_4 = 10\,m$
$h_5 = 14\,m$
$h_6 = 18\,m$



Curve 1 : 7 Uhr vormittags.
" 2 : 8.30 " "
" 3 : 10 " "
" 4 : 11.30 " "

Curve 5 : 1 Uhr nachmittags.
" 6 : 2.30 " "
" 7 . 4 " "
" 8 : 5.30 " "

M. d. L. = 1:1000
M. d. H. 1:07

wohl geltenden Asymmetrie der Lichtkurve einzelne Refraktionseinflüsse für grössere Zielhöhen gegenüber kleineren Zielhöhen als zu bedeutend ausfallen. Ohne auf diese Unsicherheiten, die übrigens keine wesentliche Grösse annehmen, näher einzugehen, sei diesbezüglich nur folgendes bemerkt: Abgesehen von der besonderen Lage der einzelnen Punkte mögen diese Unstimmigkeiten hauptsächlich darin begründet sein, dass die drei, zwar gleichen Zielhöhen aber verschiedenen Zielweiten entsprechenden Bogenstücke der Lichtkurve keineswegs in einer vertikalen Ebene sich befinden; vielmehr liegen dieselben, wie Skizze auf S. 46 ausweist, in mehr oder weniger von einander abweichenden Richtungen. Dass aber insbesondere die in Bodennähe befindlichen Luftschichten trotz des dort fortwährend stattfindenden Temperaturausgleichs und damit bedingten Auf- und Abwärtsströmens der Luftteilchen stets den vorausgesetzten Schichtungscharakter besitzen, darf wohl mit Recht bezweifelt werden.

Immerhin ist aus obiger Darstellung der Lichtkurven mit grosser Sicherheit zu erkennen, dass im allgemeinen die Refraktionsfehler im umgekehrten Verhältnis zur Zielhöhe stehen.

Zum Beweise, dass diese Erscheinung nicht nur bei schönem, warmem Wetter mit verhältnismässig hohen Temperaturen stattfindet, sind im folgenden, S. 60—62, die für den kalten Tag beobachteten Lichtkurven dargestellt.

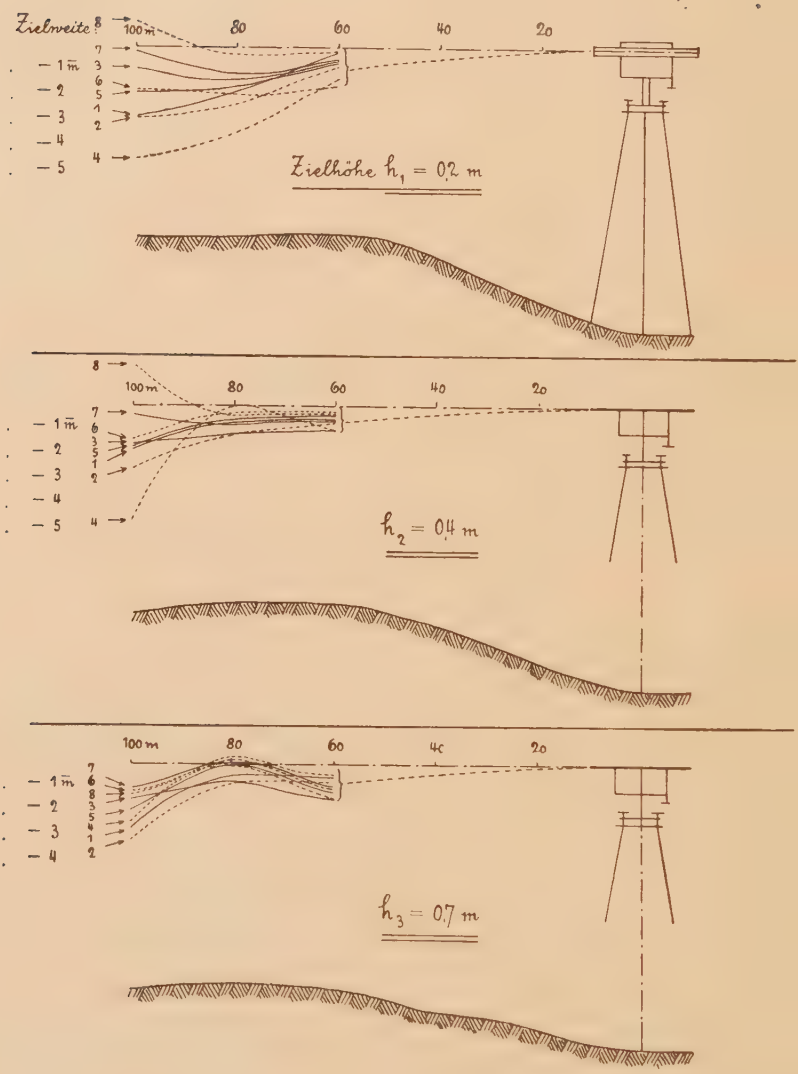
Auch aus dieser Kurvenzusammenstellung des kalten Tages geht deutlich hervor, dass, wenn gleich die Refraktionsfehler hier mit Rücksicht auf die niederen Temperaturen nur geringe Werte gegenüber den am warmen Tag beobachteten erreichen, dieselben doch um so kleiner werden, je weiter die Ziellinie vom Boden entfernt zu liegen kommt und umgekehrt.

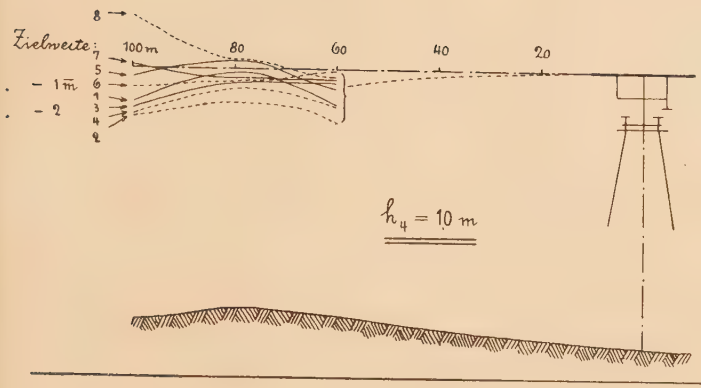
2. Abhängigkeit der Refraktionswirkung von Temperatur und Zielhöhe. Darstellung und Diskussion der Fehlerkurven.

Bei der vorausgegangenen Betrachtung des Zusammenhangs zwischen Refraktionsfehler, Zeit und Zielhöhe wurde die Bedeutung des Temperatureinflusses auf die Refraktionsgrösse gänzlich ausgeschieden.

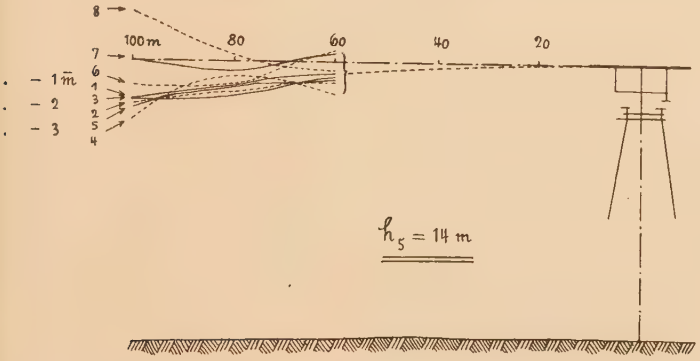
Da aber die Tagestemperaturen als annähernd korrespondierend mit den entsprechenden Beobachtungszeiten betrachtet werden können, soll nach-

Kalter Tag, Temperatur 9°–14° C

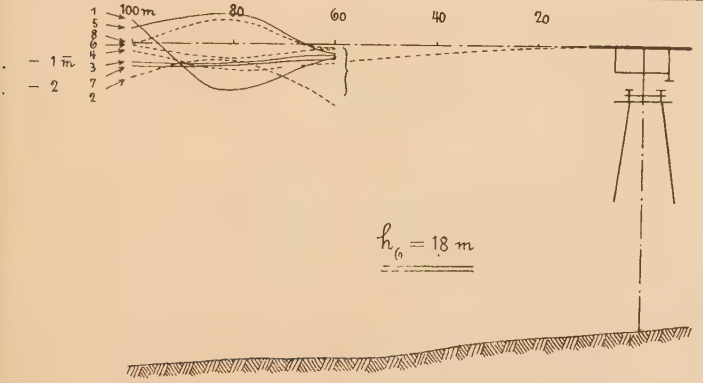




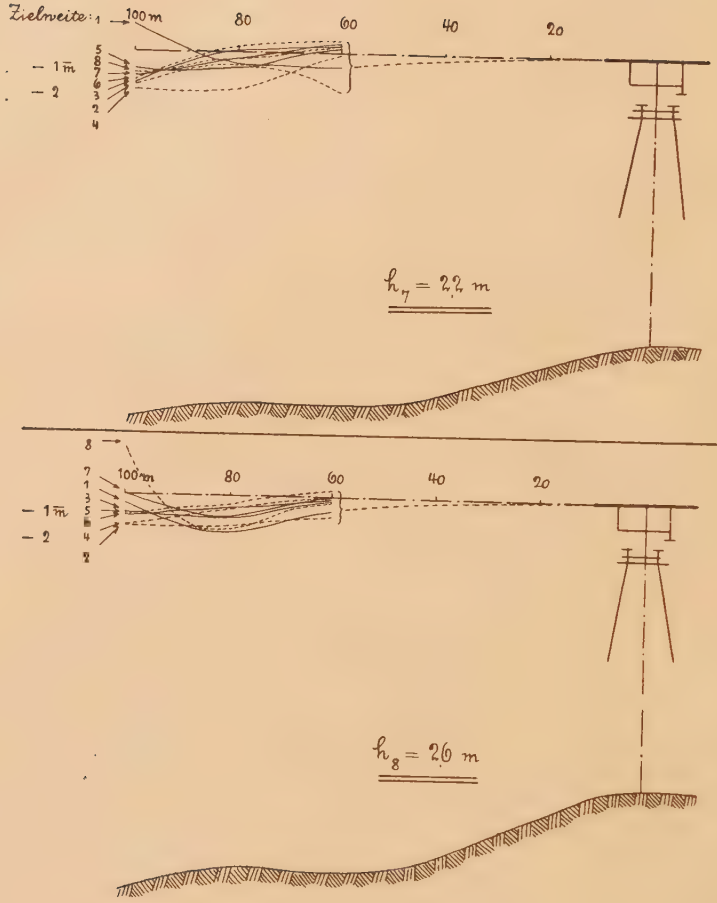
$h_4 = 10\ m$



$h_5 = 14\ m$



$h_6 = 18\ m$



Curve 1 : 7 Uhr vormittags.
" 2 : 8.30 " "
" 3 : 10 " "
" 4 : 11.30 " "

Curve 5 : 1 Uhr nachmittags
" 6 : 2.30 " "
" 7 : 4 " "
" 8 : 5.30 " "

M. d. L. = 1 : 1000
M. d. H. = 1 : 67

stehend eine Untersuchung zwischen Refraktionsfehler, Zielhöhe und Temperatur vorgenommen werden, wobei zwei Arten von Kurven A und B zur Darstellung gelangen.

A. In einem rechtwinkeligen Koordinatensystem, dessen Abszissen die im Laufe des Tages beobachteten Temperaturen, z. B. für den „warmen Tag" von 16°—31° bilden, werden als Ordinaten die zunächst für jede einzelne Zielhöhe beobachteten Refraktionsfehler aufgetragen und die erhaltenen Punkte gemäss der Reihenfolge in der Beobachtungszeit miteinander verbunden. Auf diese Weise erhält man nun für jede Zielhöhe eine besondere Kurve der Refraktionsfehler. Es erwies sich als zweckmässig, diese Fehlerkurven nach den drei Zielweiten von 60, 80 und 100 m auszuscheiden und sie wieder mit verschiedenen Stricharten und Zahlen zu bezeichnen.

Bei Betrachtung dieser auf S. 64 zuerst für den warmen Tag konstruierten Kurven fällt wieder die bereits in der Untersuchung der Lichtkurven in Abs. 1 dieses Abschnitts erkannte Tatsache auf, dass im allgemeinen die Refraktionsfehler sich umgekehrt proportional den entsprechenden Zielhöhen verhalten. Bei allen drei Zielweiten erreichen nämlich die mit Zahl 1 oder 2 bezeichneten Kurven, die den Beobachtungen für die kleinsten Zielhöhen zu 0,2—0,4 m entsprechen, die grösste Abweichung von der horizontalen Visur, während im Gegensatz hiezu die den grossen Zielhöhen über 2 m zukommenden Kurven 7 und 8 bedeutend geringere Refraktionsfehler zur Darstellung bringen.

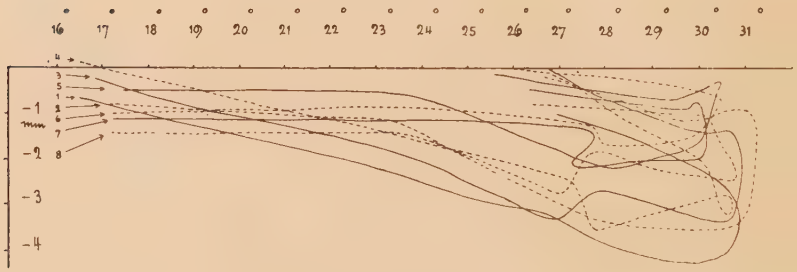
Ausserdem aber ist deutlich erkennbar, dass das Fehlermaximum nicht nur bei der geringsten Zielhöhe, sondern gleichzeitig bei der höchsten Temperatur, hier also 30°—31° stattfindet. Bei sämtlichen drei Zielweiten liegt der Anfang der Kurven links oben, also bei den niederen Temperaturen von etwa 16°—17° und bei geringen Fehlerwerten, während die Kurven in ihrem weiteren Verlauf gegen Mittag nach rechts unten zur höchsten Temperatur und den grössten Fehlerbeträgen hinstreben; nachdem das Fehlermaximum erreicht ist, wenden sich die Kurven, um hierauf annähernd wieder in der Richtung zum Ausgangsort zurückzukehren. Man kann daher bei sämtlichen Kurven eine ausgeprägte Wendung zum Fehlermaximum und eine analoge Rückwendung unterscheiden. Beide Kurvenzweige, die dem Verhalten der Fehler am Vormittag und Nachmittag entsprechen, zeigen, abgesehen von wenigen Ausnahmen bei 100 m Zielweite, in allen übrigen Fällen einen angenähert parallelen Verlauf.

Der Abstand der beiden parallelen Kurvenzweige ist jedoch keineswegs konstant; vielmehr nimmt er mit wachsenden Zielweiten, mit deren Quadrat auch die Refraktionsfehler grösser werden, ebenfalls zu, während er mit wachsender Zielhöhe eine deutlich erkennbare Abnahme zeigt. Dagegen darf,

Warmer Tag

60 m Zielweite

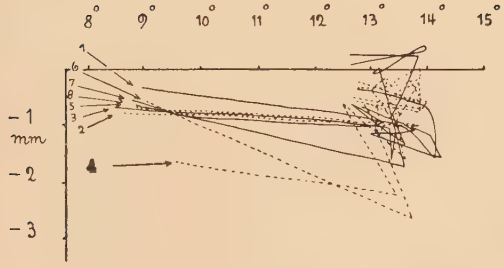
80 m Zielweite



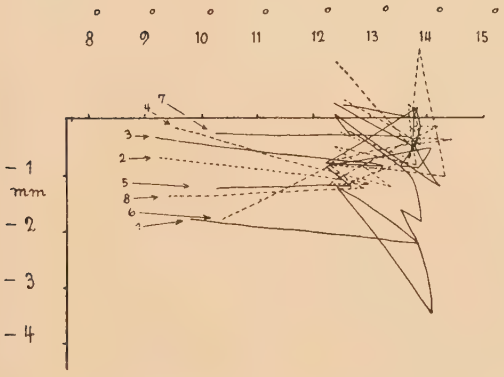
100 m Zielweite

Kalter Tag.

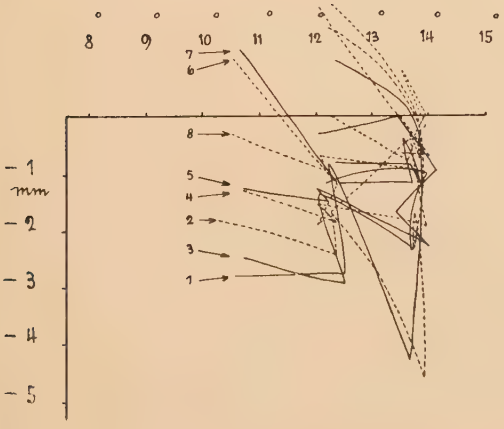
60 m Zielweite



80 m Zielweite



100 m Zielweite



Curve 1 für Zielhöhe: 0,2 m
" 2 " " 0.4 "
" 3 " " 0.7 "
" 4 " " 1.0 "
" 5 " " 1.4 "
" 6 " " 1.8 "
" 7 " " 2.2 "
" 8 " " 2.6 "
"

wenigstens für die S. 64 dargestellten Kurvenscharen die Neigung der beiden Kurvenzweige gegen die x-Achse für alle 3 Zielweiten als konstant betrachtet werden, so dass in roher Annäherung die Beziehung der Refraktionsfehler zu den Temperaturen durch die Form: $y = a + b \cdot x$ zum Ausdruck gebracht werden kann, wenn a und b Konstante bedeuten. Während hiebei der Wert b, die Tangente des Neigungswinkels der Kurve gegen die x-Achse, als genähert konstant erscheint, nimmt die Grösse a bei verschiedenen Zielhöhen und Zielweiten wechselnde Werte an.

Weisen auch diese Kurven analog den auf S. 56 u. ff. dargestellten Lichtkurven gewisse kleine Unregelmässigkeiten auf, die in der Natur der schwer fassbaren Schwankungen der Beobachtungsgrössen begründet sind, so ist doch deutlich zu ersehen, dass trotz der verschiedenen Lage und Entfernung der zur Verwendung gekommenen 24 Punkte der allgemeine Kurvenverlauf stets den gleichen Charakter besitzt.

Ziemlich unregelmässig dagegen gestaltet sich derselbe für die am kalten Tag ausgeführten Beobachtungen, was jedoch mit Rücksicht auf die hier überhaupt geringe Grösse der Refraktionsfehler erklärlich ist.

Erscheint es bei den diesbezüglichen auf S. 65 dargestellten, vielfach gebrochenen Fehlerlinien — von stetigen Kurven kann hier nicht mehr die Rede sein — auch völlig ausgeschlossen, für dieselben noch einen mathematischen Näherungsausdruck zu finden, so ist doch auch hier zum grössten Teil noch ersichtlich, dass die Refraktionsfehler zu den Temperaturen in einem direkten, zu den Zielhöhen in einem reziproken Verhältnis stehen.

B. Die Darstellung der Beziehungen zwischen Refraktionsfehler, Zielhöhe und Temperatur kann auch in einer anderen Form B erfolgen: Diese entsteht aus der auf S. 64 dargestellten Form A dadurch, dass zunächst für eine Temperatur, z. B. 22°, die dieser entsprechenden Ordinatenschnitte der Fehlerkurven für alle Zielhöhen entnommen und in einem neuen Koordinatensystem, dessen Abszissen nunmehr die einzelnen Zielhöhen bilden, wieder als Ordinaten aufgetragen werden. Auf diese Weise wird durch annähernd geradlinige Interpolation gefunden, welche Refraktionsfehler bei bestimmten Temperaturen, beispielsweise bei unseren 22°, den verschiedenen Zielhöhen von Punkt 1 bis Punkt 8 entsprechen.

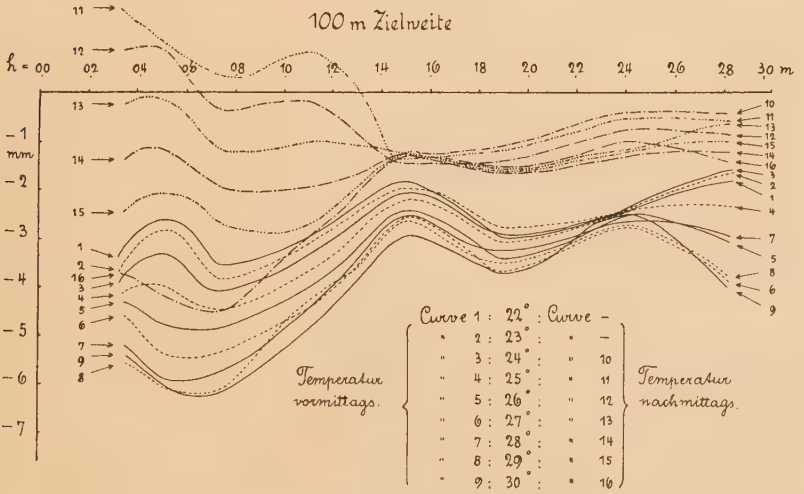
Analog wie für 22° ist dies auch für die übrigen Temperaturen zur Durchführung gekommen, wobei es wieder zweckmässig erschien, eine Ausscheidung der Kurven nach den 3 Zielweiten vorzunehmen. Zunächst fol-

Warmer Tag

60m Zielweite

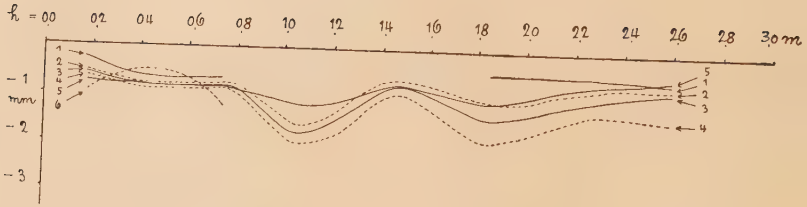
80m Zielweite

100 m Zielweite

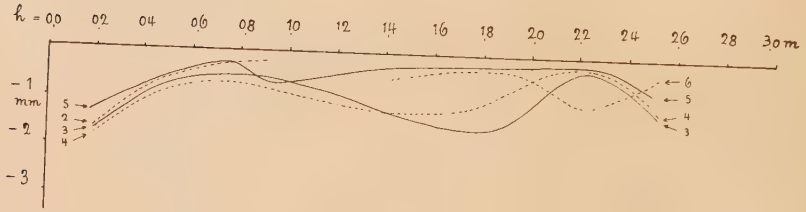


Kalter Tag.

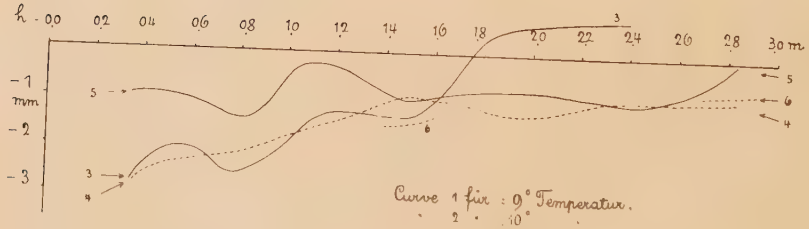
60m Zielweite



80m Zielweite



100m Zielweite



Curve 1 für : 9° Temperatur.
" 2 " : 10° "
" 3 " : 11° "
" 4 " : 12° "
" 5 " : 13° "
" 6 " : 14° "

gen auf S. 67 die aus den Beobachtungen für den warmen Tag abgeleiteten Fehlerkurven, deren Bezeichnung mittels besonderer Strichart und Zahlen sich an die früher gewählte anschließt.

In gleicher Weise ist auch die Darstellung der entsprechenden Kurven für den kalten Tag (siehe S. 68) ausgeführt worden.

Hinsichtlich dieser nach dem Schema B auf S. 67 und 68 dargestellten Fehlerkurven ist zu bemerken, dass auch bei ihnen naturgemäss die bereits bekannte Beziehung der Refraktionsfehler zur Zielhöhe und Temperatur zum Ausdruck kommen muss. Im Gegensatz zu den Kurven A nehmen hier die Kurven eine mehr wellige Form an, und in ihrem Verlauf von links nach rechts zeigen sie in der Hauptsache eine Annäherung an die Abszissenachse. Dabei entspricht den in A rückwärts laufenden Kurvenzweigen hier, in B, eine der Abszissenachse mehr sich anschliessende Kurvenschar, in welcher die am Nachmittag auftretenden Refraktionsfehler gegenüber jenen des Vormittags besonders hervortreten. Dieses zweite, dem ersten annähernd parallele Kurvensystem ist bei der Zielweite von 100 m für den warmen Tag besonders deutlich ausgeprägt, während es bei den Zielweiten von 60 und 80 m infolge der hier geringeren Fehlerwerte mit den Kurven der Vormittagsbeobachtungen verschmilzt.

Die Fehlerkurven B für den kalten Tag S. 68 treten weit spärlicher auf. Trotz der an und für sich nur kleinen Anzahl von verschiedenen Beobachtungstemperaturen verschwindet für einige derselben je nach der Zielweite die eine oder andere Fehlerkurve ganz. Begründet ist diese Erscheinung in den zu unsicheren Ordinatenunterschieden, d. h. in den zu wenig voneinander abweichenden Fehler- und Temperaturgrössen, so dass für den kalten Tag auch eine besondere Ausscheidung zwischen Vormittags- und Nachmittagskurven direkt unmöglich war.

Bringen demnach diese Kurven von der Form B auch keine wesentlich neue Beziehung zwischen Refraktionsfehler, Zielhöhe und Temperatur zum Ausdruck, so bestätigen sie doch, wenn auch in anderer Form, die durch die Kurven A bereits dargestellten Erscheinungen und sind von Bedeutung für eine weitere Betrachtung 3.

3. Kurvenbilder für den Refraktionseinfluss auf einzelne Zielhöhen.

Mit Benützung vorstehender, beider Kurvensysteme A und B kann nunmehr auch untersucht werden, bei welchen Zielhöhen und Temperaturen die verschiedenen Refraktionsfehler von 1—6 mm vorgekommen sind.

Will man zunächst nur jene Zielhöhen und Temperaturen ermitteln, die für das Auftreten eines bestimmten Refraktionsfehlers, z. B. von a mm in Betracht kommen, so werden die diesem Fehler entsprechenden Ordinatenabschnitte der Fehlerkurven in A und B bestimmt und bei den letzteren eine geeignete Interpolation für den Fehlerbetrag von a mm durchgeführt. Dabei erhält man für das jeweilige Auftreten dieses Fehlers a mm je eine bestimmte Zielhöhe h_1 und Temperatur t_1, die bei Darstellung in einem besonderen Koordinatensystem die eindeutige Lage eines Punktes bedingen. Nun aber tritt der Refraktionsfehler von a mm während des Tages bei den verschiedenen Zielhöhen und Temperaturen wiederholt auf, was in dem erwähnten Koordinatensystem jedesmal durch einen weiteren Punkt bezeichnet werden soll. Durch Verbindung der so erhaltenen Punktreihe entsteht dann eine Kurve, welche das im Laufe des Tages mehrmals stattfindende und von der Zielhöhe sowie der Temperatur abhängige Auftreten eines bestimmten Refraktionsfehlers zum Ausdruck bringt. Ebenso wie für diesen einen Fehler lassen sich für das Auftreten der übrigen Refraktionsfehler zwischen 1—6 mm und beliebigen Bruchteilen derselben die entsprechenden Kurven herstellen. Das so erhalten Kurvenbild = „Isoplethen der Refraktion im Nivellement" kann bei einigermassen regelmässigem Verlauf der Kurven wohl mit einem Höhenschichtenplan [19]) verglichen werden. Auch hier soll eine Ausscheidung der Beobachtungen nach Zielweiten und zwar zunächst für den warmen Tag erfolgen.

Bei Betrachtung der diesbezüglichen auf S. 71—73 dargestellten Kurvenbilder muss wohl jeglicher Zweifel darüber schwinden, dass man es bei der Refraktion im Nivellement mit einem nach gewissen Gesetzen sich äussernden, systematischen Fehlereinfluss zu tun hat. Selbst bei 60 m (Kurvensystem auf S. 71), also einer noch verhältnismässig geringen Zielweite, nimmt die nach obigen Angaben konstruierte Kurvenschar eine ziemlich regelmässige Form an, die bei 80 m und 100 m Zielweite noch ausgeprägter wird. Die Interpolation der Kurven A und B könnte man bis zu beliebig kleinen Intervallen der Refraktionsfehler, also selbst bis 0,1 mm fortführen; hier wurde sie jedoch mit Rücksicht auf die Beobachtungsgenauigkeit auf 0,2 bezw. 0,3 mm beschränkt.

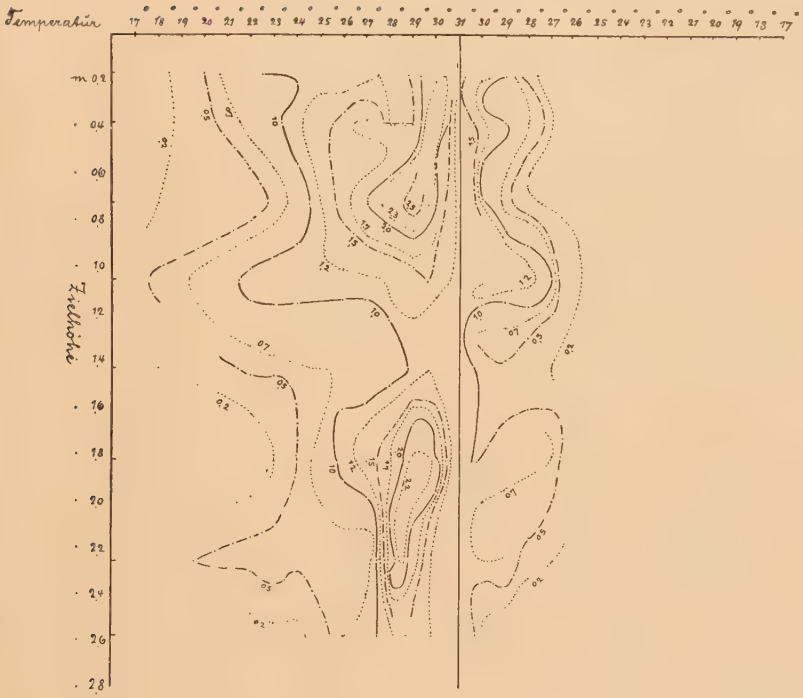
Infolge der Benützung sämtlicher Kurven A liess sich für alle 3 Ziel-

---

[19]) Aus Zweckmäßigkeitsgründen empfiehlt es sich, für die Betrachtungen 3 und 4 dieses Abschnittes IV an Stelle der bei der Beobachtung fast ausnahmslos als negativ gefundenen Refraktionsfehler deren positiven Werte zu verwenden; somit entspricht der dargestellten Erhebung der Fehlerfläche in Wirklichkeit eine Zunahme der negativen Fehler.

Isoplethen der Refraktion im Nivellement.

60 m = Zielweite.



weiter die Ausscheidung der Vormittags- und Nachmittagsbeobachtungen vornehmen, wovon weiter unten noch die Rede sein wird.

Bei Betrachtung der Kurvenbilder fällt sofort auf, dass auch hier die Refraktionsfehler bei den geringen Zielhöhen und hohen Temperaturen ihr Maximum erreichen; dies kommt in annähernd gleicher Weise bei den Kurvendarstellungen für sämtliche 3 Zielweiten zum Ausdruck. Eine Ausnahme bildet nur das Kurvenbild für die Zielweite von 60 m, bei welchem ausser dem normalen Fehlermaximum noch ein sekundäres Maximum, etwa bei 2 m Zielhöhe sich zeigt, das vom ersten Fehlermaximum durch einen Sattel getrennt wird. Im übrigen aber ergeben sich solche Fehlerkurven, welche die klei-

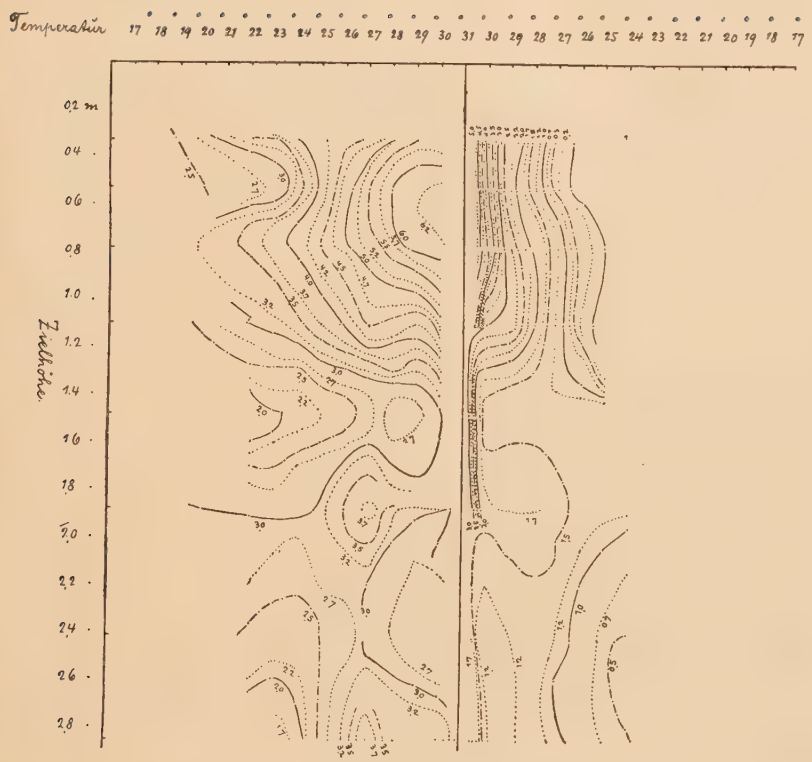
80 m-Zielweite.

neren Refraktionsfehler zur Darstellung bringen, vorwiegend bei grossen Zielhöhen und niederen Temperaturen, während umgekehrt die Kurven der bedeutenderen Refraktionsfehler hauptsächlich in der Nähe der hohen Temperaturen und geringen Zielhöhen verlaufen.

Selbstverständlich sind die Maximalfehler für die 3 Zielweiten nicht gleich gross. Bei 60 m Entfernung kommt hiefür eine Fehlergrösse von 2,5 mm in Betracht, bei 80 m erreicht der grösste Fehlerwert rund 3,5 mm und in der Zieldistanz von 100 m ist das Fehlermaximum bereits ca. 6 mm.

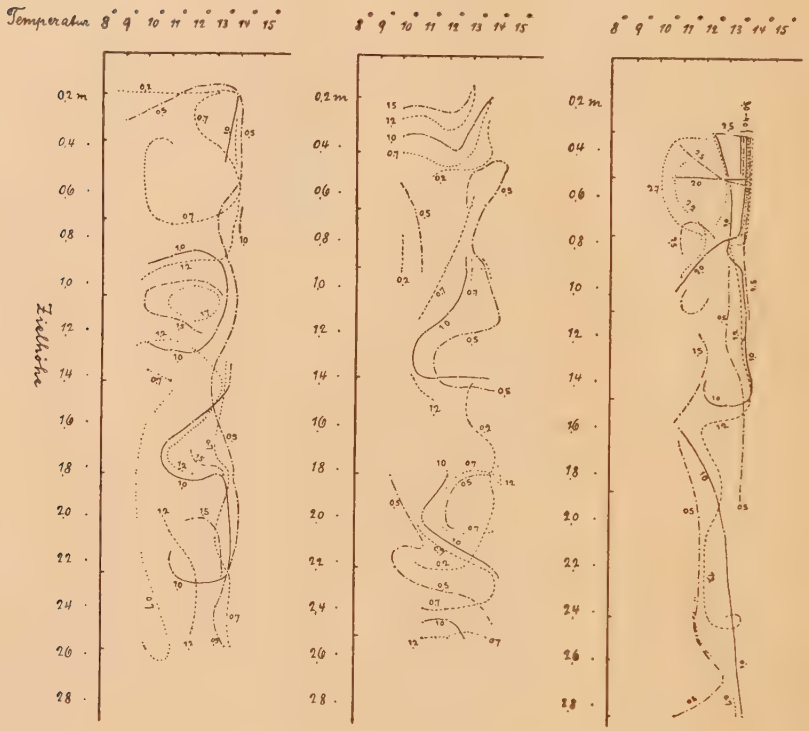
Während in den Kurvenbildern aller 3 Zielweiten für den Vormittag die Fehlerfläche ein allmähliches Ansteigen zeigt und gegen Mittag bei den geringen Zielhöhen und den höchsten Temperaturen ihre grösste Erhebung erreicht, fällt sie im Laufe des Nachmittags in der zum Anstieg symmetrischen Richtung rasch wieder ab.

100 m = Zielweite.



Dieses für den Nachmittag geltende, grössere Gefälle in der Fehlerfläche ist darin begründet, daß die Temperatur, nachdem sie ihren Maximalwert angenommen hat, keineswegs gleich wieder zu fallen beginnt. Vielmehr halten die hohen Temperaturen, sobald der Boden seine grösstmögliche Erwärmung erfahren, noch längere Zeit an, so dass selbst um 2 Uhr bezw. 3 Uhr fast noch die gleichen Temperaturen wie zur Mittagszeit von 12—1 Uhr herrschen. Vergl. S. 23. Dies hat zur Folge, dass auch abends 6—7 Uhr noch eine wesentlich höhere Temperatur in der Bodennähe vorhanden ist, als dies für die gleiche Zeit am Vormittag zutrifft. Somit zeigen die Refraktionsfehler am Nachmittag gegenüber jenen des Vormittags eine gewisse Unsymmetrie, die in vorstehenden Kurvendarstellungen zum Ausdruck kommt.

Isoplethen der Refraktion im Nivellement.



Während man solche ausgeprägte Kurvenbilder nur an schönen, warmen Tagen mit entsprechend grossen Temperaturunterschieden erhält, besitzen die Fehlerkurvensysteme bei niederen Temperaturen und geringen Wärmeschwankungen entschieden eine weniger ausgeprägte Form, wie die analoge Darstellung der am kalten Tag beobachteten Refraktionsfehler beweist.

Im wesentlichen ist zwar auch bei diesen Kurvenbildern auf S. 74 das bereits für den warmen Tag besprochene Verhalten zu erkennen, insbesondere das gesetzmässige Verhalten des Fehlermaximums, das bei hoher Temperatur und geringer Zielhöhe auftritt.

Immerhin fällt es hier aber schwer, die bisweilen ziemlich zerstreut liegenden Punkte zu stetig verlaufenden Kurven zu verbinden, so dass das ganze Kurvensystem eine Lockerung erfährt und damit eine gewisse Neigung zur völligen Auflösung zeigt. Es lässt sich daher hier auch keine Ausscheidung zwischen Fehlerkurven des Vormittags und Nachmittags durchführen, wie auch die Fehlermaxima oder die höchsten Gipfel in der Fehlerfläche nur verhältnismässig kleine Höhen erreichen.

4. Kurvenbilder für den Refraktionseinfluss auf Höhenunterschiede.

Ebenso wie in Absatz 3 der Refraktionseinfluss auf eine einzelne Visur in seiner Abhängigkeit von Temperatur und Zielhöhe dargestellt wurde, so wird nunmehr die gleiche Untersuchung auf einen Höhenunterschied ausgedehnt.

Zu diesem Zwecke ist aus dem für den warmen Tag geltenden Beobachtungsmaterial zu ermitteln, in welcher Weise durch die Refraktionswirkung ein bestimmter Höhenunterschied verändert wird. Für diese Betrachtung wurden zwei verschiedene Höhenunterschiede, nämlich von ca. 1 m und 2 m gewählt, die sich in dreifacher Weise aus den Lattenablesungen im Beobachtungsgelände bilden lassen. Dabei ergeben sich für den ersten Höhenunterschied $\Delta h_1 = 1{,}0$ bis 1,2 m die drei Ableitungsmöglichkeiten aus den Lattenablesungen z in den Punkten:

z_1—z_5,	wobei Zielhöhe der unteren Lattenablesung	$z_1 = 0{,}2$ bis 0,3 m
z_2—z_5,	„ „ „ „ „	$z_2 = 0{,}4$ „ 0,5 m
z_3—z_6,	„ „ „ „ „	$z_3 = 0{,}7$ „ 0,8 m

Ebenso lässt sich der 2. Höhenunterschied Δh_2 zu 1,8 bis 2,1 m ableiten aus den Lattenablesungen z für die Punkte:

z_1—z_7
z_2—z_7
z_3—z_8

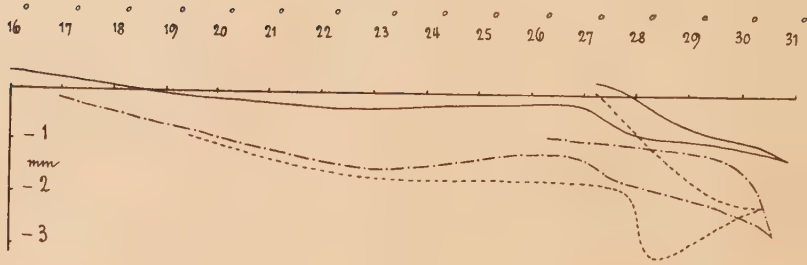
wobei die gleichen unteren Lattenablesungen z_1, z_2 und z_3 wie zuvor gelten.

Bei der vorhandenen symmetrischen Punktanordnung haben diese Beziehungen mit genügender Näherung für alle 3 Zielweiten Gültigkeit. Will man nunmehr den Refraktionseinfluss auf den ersten Höhenunterschied der Punkte 1 und 5 bestimmen, so braucht man nur, wie dies bereits bei

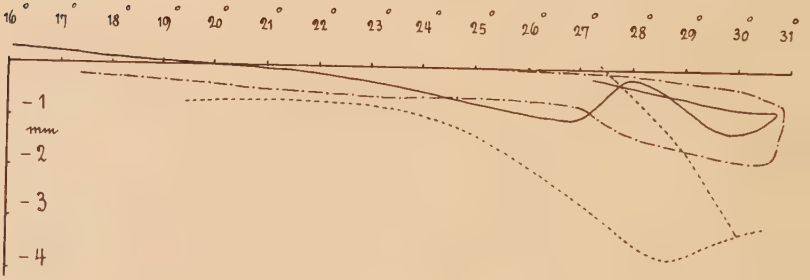
Δh_1 = Höhenunterschied von 1.0 - 1,2 m

Curven A

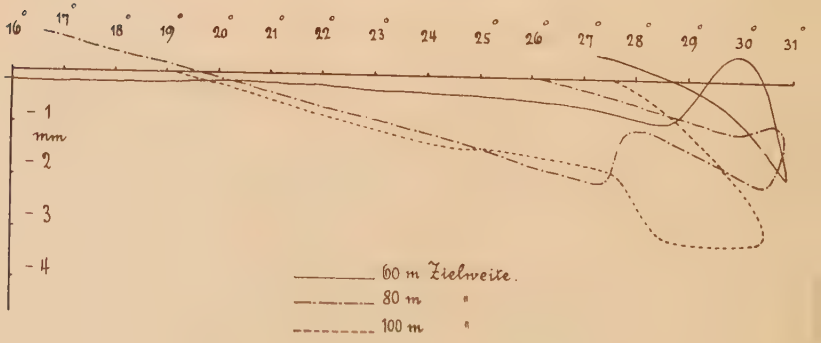
bei 0,2 m Zielhöhe



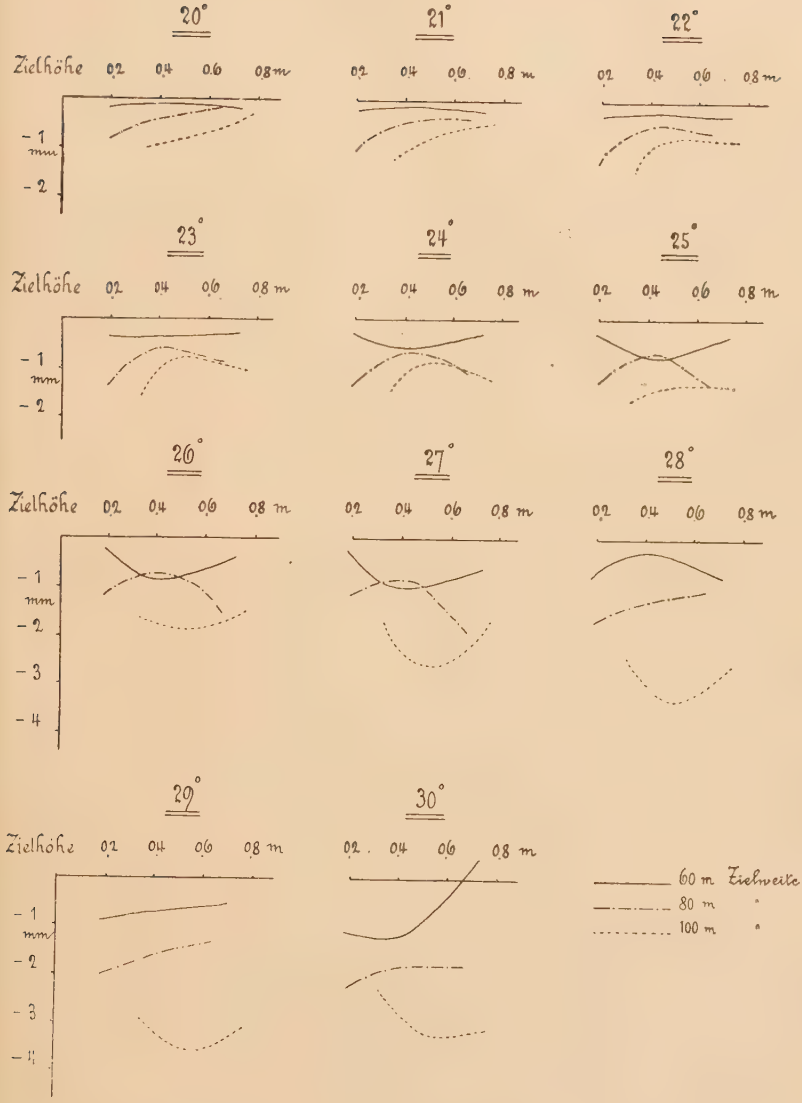
bei 0,4 m Zielhöhe



bei 0,7 m Zielhöhe



Curven B für Δh_1



der Untersuchung der Lallemand'schen Refraktionsformel geschehen, die für die Punkte 1 und 5 beobachteten Refraktionsfehler (S. 48 u. ff.) voneinander zu subtrahieren, also $\Delta f = f_1 - f_5$ zu bilden, während als entsprechende Temperatur das Mittel $t = \frac{t_1 + t_5}{2}$ eingeführt werden soll

Ebenso verfährt man für die übrigen Punkte, so dass unter Ausscheidung nach den 3 Zielweiten wieder Kurven von der Form A und B wie in Absatz 2 dieses Abschnittes entstehen, die auf S. 76, 77 und 79, 80 dargestellt sind.

Ohne auf eine nähere Betrachtung der beiden Kurvensysteme A und B für die zwei Höhenunterschiede Δh_1 und Δh_2 einzugehen, sei nur bemerkt, dass dieselben im allgemeinen wieder einen ähnlichen Verlauf wie jene unter A und B in Absatz 2 (siehe S. 64, 65 bezw. 67, 68) zeigen, weshalb im wesentlichen das dort Ausgeführte auch hier zutreffen wird. Da im Gegensatz zu der dortigen Anzahl von 8 Zielhöhen hier deren nur 3 zur Verwendung kommen, gestalten sich die neuen Kurven der Form B bedeutend einfacher als die früheren.

Durch geeignete Interpolation dieser Hilfskurven A und B erfolgt nunmehr die Konstruktion der Kurvenbilder = Refraktionsisoplethen für Δh_1 und Δh_2 und zwar ebenfalls ausgeschieden nach den 3 Zielweiten. Bei kurzer Würdigung dieser Kurvensysteme auf S. 81 u. 82 ist folgendes zu bemerken:

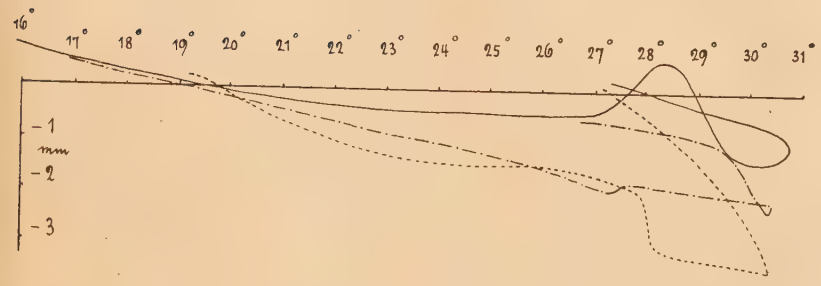
Fürs erste muss auch hier wieder die Regelmässigkeit im Verlauf dieser Kurven auffallen, die ebenso wie bei den vorhergehenden Kurvendarstellungen keine Zufälligkeit sein kann. Dies tritt hier um so mehr hervor, als die verwendeten Temperaturen nicht direkte Beobachtungen sind, vielmehr erst durch Mittelbildung aus zwei zu verschiedenen Zeiten bestimmten Temperaturen erhalten wurden. Auch die Beobachtung der zur Bestimmung eines Höhenunterschiedes Δh erforderlichen beiden Einzelvisuren bezw. ihrer Refraktionsfehler, konnte nicht zu gleicher Zeit stattfinden. Daraus folgt, dass durch Subtraktion dieser beiden Refraktionsfehler ebenfalls eine nicht ganz homogene Unterlage für die Untersuchung des Refraktionseinflusses geschaffen wurde.

Trotz dieser notwendigen Umrechnungen weisen aber die entstandenen Kurvenbilder ein ausgesprochen systematisches Verhalten des Refraktionseinflusses auch für Höhenunterschiede auf. Wie bei einzelnen Zielungen so erreicht die Refraktionswirkung auch hier bei hohen Temperaturen und ge-

Δh_2 = Höhenunterschied von 1,8 - 2,1 m

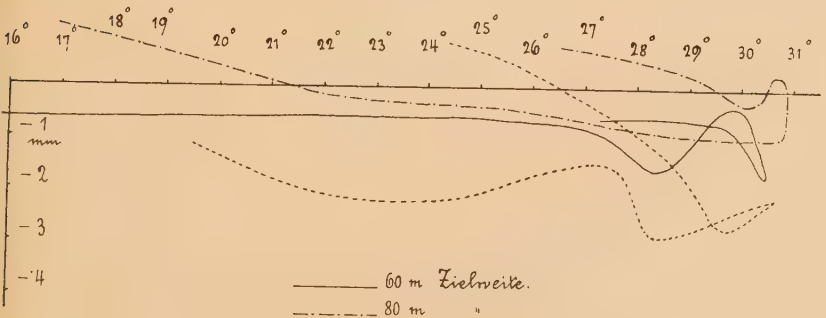
Curven A

bei 0,2 m Zielhöhe

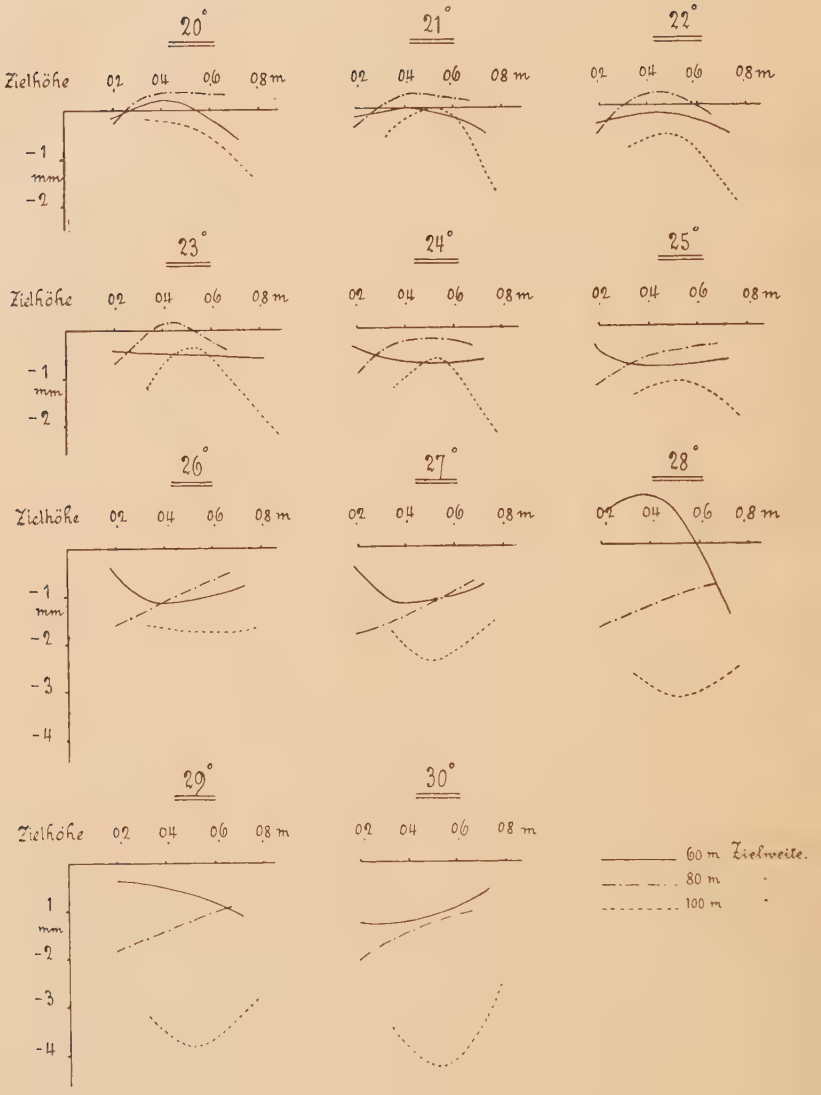


bei 0,4 m Zielhöhe

bei 0,7 m Zielhöhe

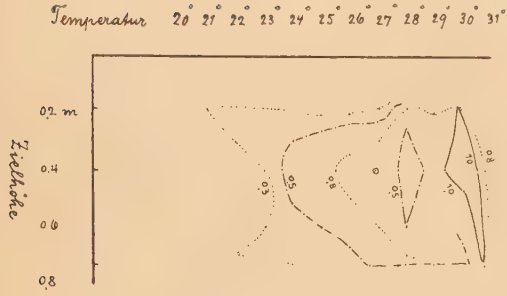


Curven B für Δh_2



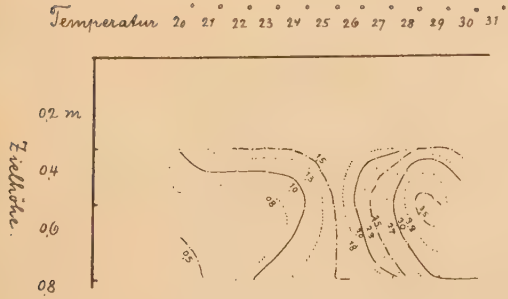
Curvenbilder für Sh_1.

(Choplethen)



60 m Zielweite

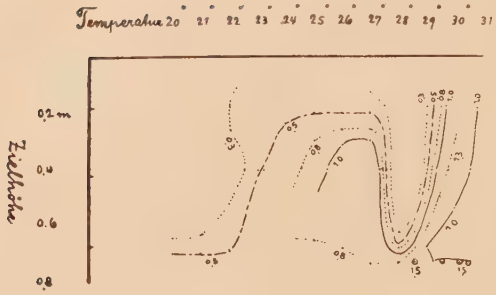
80 m Zielweite



100 m Zielweite

Kurvenbilder für Sh_2

(Isoplethen)



60 m Zielweite

80 m Zielweite

100 m Zielweite

ringen Zielhöhen ein Maximum, wenngleich ihre Fehlerwerte naturgemäss kleiner wie bei einzelnen Zielungen ausfallen.

Immerhin nehmen die Fehlermaxima bei den zwei Höhenunterschieden in der Zielweite von 100 m bereits die ansehnliche Grösse von 3,5—4 mm an, während sie bei 60 m, d. i. bei einer für Präzisionsnivellements noch in Betracht kommenden Zielweite, 1—1,5 mm betragen.

Allerdings treten diese Maximalfehler nur bei schönem, warmem Wetter mit grösseren Temperaturschwankungen auf, während sie bei kalter, nebliger Witterung und bei bedecktem Himmel wesentlich kleinere Werte erreichen.

So ist es versucht worden, dieselbe Betrachtung auch für die Beobachtungen des kalten Tages durchzuführen, wobei jedoch die erhaltenen Fehlerbeträge, die grösstenteils nur einige Zehntelmillimeter betrugen, wohl als innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler fallend zu betrachten sein werden. Wie ferner eine einfache Ueberlegung ergibt, und wie auch in den Refraktionsformeln zum Ausdruck gelangt, nimmt der Refraktionseinfluss mit grösser werdendem Höhenunterschied ebenfalls zu. Um dies zu zeigen, wurden absichtlich für vorstehende Betrachtung zwei verschieden grosse Höhenunterschiede gewählt. Aus den dargestellten Kurvenbildern auf S. 81 und 82 ergibt sich denn auch, dass die Fehlerwerte bei $\Delta h_2 = 2$ m nahezu für alle Zielweiten etwas grösser ausfallen als jene bei $\Delta h_1 = 1$ m.

V. Unterschied zwischen der Refraktion im Nivellement und der Strahlenbrechung in der freien Atmosphäre.

Während im vorhergehenden Abschnitt der Einfluss der Zielhöhe und der Temperatur auf die Refraktion im Nivellement zur Darstellung kam, soll hier eine Betrachtung über die Bedeutung der Temperaturgradienten n für die Refraktion im Nivellement angestellt werden. Im Gegensatz zu den Formeln von Lallemand, Jordan und Hugershoff wird hier die Wirkungsweise dieser Temperaturänderungskoeffizienten n nicht für sich allein, sondern im Zusammenhang mit der herrschenden Temperatur untersucht. Daraus lässt sich die wichtige Tatsache ableiten, dass die Refraktion im Nivellement sich geradezu ursächlich von der terrestrischen Strahlenbrechung

unterscheidet, welch' letztere man bisher irrtümlicherweise auch als für das Nivellement gültig betrachtet hat.

Im folgenden sollen zunächst für die einzelnen Beobachtungsreihen an allen 3 Beobachtungstagen, von 5 Uhr bezw. 7 Uhr morgens bis 6 Uhr abends, die entsprechenden Refraktionskoeffizienten mittels der gewöhnlichen, für terrestrische Strahlenbrechung gültigen Beziehung $dh = \frac{a^2}{2R} \cdot k$ abgeleitet werden; dabei bedeuten: dh = Mittelwert der für jede Beobachtungsreihe und die verschiedenen Zielweiten gefundenen Refraktionsfehler, a = Zielweite, R = Erdradius und k = Refraktionskoeffizient.

Da in dieser Formel dh lediglich die durch Refraktion bewirkte Höhenänderung vorstellt, der Einfluss der Erdkrümmung somit schon ausgeschieden wurde, ist eine besondere Berücksichtigung des letzteren nicht mehr erforderlich.

Durch Umwandlung wird: $k = -\frac{2R}{a^2} \cdot dh$ . . . . . 7]

k besitzt also stets entgegengesetztes Vorzeichen von dh. Solange daher letzteres positiv ist, wie in den frühen Morgenstunden und teilweise auch abends nach eingetretener Abkühlung des Bodens, haben wir es nach Abschnitt II mit einer negativen Refraktionswirkung zu tun, die bei der terrestrischen Strahlenbrechung die sogenannte „Fata morgana" bewirkt. Für die praktisch hauptsächlich in Betracht kommende Arbeitszeit, also während des Tages, ist dagegen die Refraktion auch beim Nivellement analog der terrestrischen Refraktion positiv, und die Ablenkung der Zielstrahlen erfolgt in der Regel wie dort zur Erde.

Und dennoch bestehen, wie bereits angedeutet, zwischen beiden Refraktionsformen wesentliche Unterschiede, was nachfolgende Zusammenstellung der gemäss Formel 7] berechneten Refraktionskoeffizienten beweist.

1. Tag. (Aus Beobachtungen auf S. 19 u. ff.):

Beobachtungs-Zeit	40 m Zielweite			60 m Zielweite			80 m Zielweite			100 m Zielweite		
	k	p	q	k	p	q	k	p	q	k	p	q
5 Uhr morgens	—2.8	22	0.36	—1.2	9	0.83	—0.1	1	10.00	—0.1	1	10.00
7 „ morgens	—1.2	9	0.83	+0.2	2	5.00	+0.9	7	1.10	+1.5	12	0.67
8½ „ vorm.	+1.2	9	0.83	+3.7	28	0.27	+4.7	36	0.21	+4.1	32	0.24
10½ „ vorm.	+3.6	28	0.28	+2.7	21	0.37	+5.9	45	0.17	+6.0	46	0.17
1 „ nachm.	+4.4	34	0.23	+4.4	34	0.23	+6.5	50	0.15	+5.8	45	0.17
3 „ nachm.	—1.2	9	0.83	+2.7	21	0.37	+4.1	31	0.24	+4.8	37	0.21
6 „ nachm.	+0.4	3	2.50	+0.5	4	2.00	—0.5	4	2.00	—0.4	3	2.50

In vorstehender Tabelle sind: k = Koeffizient der Refraktion im Nivellement, $p = \frac{k}{0.13}$ = Verhältnis der Refraktion im Nivellement zum mittleren Refraktionskoeffizienten für terrestrische Strahlenbrechung, und $q = \frac{r}{R}$ = Verhältnis des Krümmungshalbmessers der Lichtkurve zum Erdradius R.

Analog für den

2. Tag. (Aus Beobachtungen auf S. 48 u. ff.):

Beobachtungs-Zeit	60 m Zielweite			80 m Zielweite			100 m Zielweite		
	k	p	q	k	p	q	k	p	q
7 Uhr morgens	+0.0	0	—	+1.4	11	0.72	+3.0	23	0.33
8½ „ vorm.	+1.9	15	0.51	+2.5	19	0.40	+3.7	28	0.27
10 „ vorm.	+3.9	30	0.26	+4.6	35	0.22	+5.3	41	0.19
11½ „ vorm.	+5.3	41	0.19	+5.2	40	0.19	+5.3	41	0.19
1 „ nachm.	+6.0	46	0.17	+5.2	40	0.19	+5.5	42	0 18
2½ „ nachm.	+3.5	27	0.28	+3.0	23	0.33	+3.0	23	0.33
4 „ nachm.	+2.8	22	0.36	+2.4	18	0.42	+2.5	20	0.39
5½ „ nachm.	+1.1	8	0.94	+0.6	5	0.17	+0.4	3	0.26

3. Tag. (Aus Beobachtungen auf S. 51 u. ff.):

Beobachtungs-Zeit	60 m Zielweite			80 m Zielweite			100 m Zielweite		
	k	p	q	k	p	q	k	p	q
7 Uhr morgens	+2.1	16	0.47	+2.0	15	0.55	+1.4	11	0.72
8½ „ vorm.	+4.6	35	0.22	+2.2	17	0.46	+2.4	18	0.42
10 „ vorm.	+2.1	16	0.47	+1.5	11	0.67	+1.6	13	0.61
11½ „ vorm.	+2.8	22	0.35	+1.8	14	0.56	+2.9	22	0.33
1 „ nachm.	+1.4	11	0.78	+0.8	6	1.27	+1.1	9	0.88
2½ „ nachm.	+1.4	11	0.78	+1.0	8	1.01	+1.3	10	0.79
4 „ nachm.	+1.1	8	0.94	+0.8	6	1.27	+0.5	4	2 00
5½ „ nachm.	+0.4	3	2.78	+0.2	1	5.30	+0.4	3	2.64

Die zur Bestimmung der vorstehenden Koeffizienten k verwendeten Refraktionsfehler dh wurden durch Mittelbildung jener Refraktionseinflüsse gefunden, die zu den verschiedenen Tageszeiten in den Punkten 1—8 aller drei Zielweiten aufgetreten waren. Diese Mittelbildung hat zur Folge, dass die

nach dem vorausgehenden Abschnitt IV so wichtigen Faktoren, Temperatur und Zielhöhe, sowie auch der Temperaturgradient in den berechneten Werten k nicht hervortreten. Daraus erklärt sich die bei Betrachtung der vorstehenden Tabellen auffallende Tatsache, nach welcher die Refraktionskoeffizienten k für die verschiedenen Zielweiten bei den gleichen Tageszeiten sich nicht immer als einander gleich ergeben, vielmehr bisweilen ziemlich beträchtliche Unterschiede aufweisen. Allerdings kann dies zum Teil auch darin begründet sein, dass die Refraktion in Wirklichkeit ein nicht genau mit dem Quadrat der Zielweite veränderliches Verhalten zeigt, wie solches in Formel 7] theoretisch angenommen wird. Von diesen Unstimmigkeiten abgesehen, verhalten sich die den einzelnen Tageszeiten entsprechenden Koeffizienten k in gleicher Weise wie die mittleren Werte der Refraktionsfehler, aus denen sie ja abgeleitet wurden. Somit müssen die k für die Refraktion im Nivellement morgens und abends nur kleine Beträge, zum Teil den Wert 0 besitzen, während sie bei der höchsten Temperatur, 1—2 Stunden nach Mittag, ein Maximum annehmen. Letzteres ist natürlich, je nachdem es sich um einen warmen oder kalten Tag handelt, verschieden gross, wie die völlig voneinander abweichenden Werte für k am 2. und 3. Tag der obigen Tabellen deutlich ergeben. Wie verhält sich nun in dieser Beziehung die terrestrische Refraktion?

Letztere erreicht bekanntlich[20]) in gerade entgegengesetzter Weise morgens und abends ihren grössten Wert, während ihr Minimum mittags eintritt.

Oberst Hartl[21]) hat aus 6 grossen Beobachtungsreihen für terrestrische Strahlenbrechung folgende, nach Teilen s des vom Mittag aus gerechneten, halben Tagebogens geordnete Werte für die Refraktionskoeffizienten k erhalten:

s =	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
k =	0.10	0.10	0.11	0.11	0.12	0.13	0.13	0.15	0.16	0.17	0.19

Aus dieser Zusammenstellung geht deutlich hervor, dass bei terrestrischer Strahlenbrechung die Werte k morgens und abends rund die doppelte Grösse des für Mittag geltenden Wertes erreichen. In direktem Gegensatz hiezu betragen aber für die Refraktion im Nivellement die mittags bei hoher Temperatur von ca. 30° gefundenen maximalen Koeffizienten ca. das 10—20-, ja zum Teil selbst das 30fache ihrer am Morgen und Abend auftretenden kleinsten Werte. Dies gilt wie für den warmen so auch für den kalten Tag, wenngleich bei letzterem infolge der niederen Temperatur auch die Abwei-

[20]) Vergl. Jordan, Handb. d. Vermessgskd. II. Teil, S. 589, Jahrg. 1904.
[21]) „Beiträge zum Studium der terrestrischen Strahlenbrechung" in den Mitteilungen des k. k. militärgeographischen Instituts, Wien, Bd. III, 1883.

chungen in den extremen Werten für k kleiner ausfallen. Es sind somit nicht nur die Zeiten der Maxima und Minima der Refraktionskoeffizienten, sondern auch die im Laufe des Tages eintretenden Schwankungen derselben für terrestrische Strahlenbrechung einerseits und Refraktion im Nivellement andererseits grundverschieden. Dadurch, dass man aber bisher das Verhalten der ersteren Refraktionsart auch auf das Nivellement übertrug, kam man zu der irrigen Anschauung, dass bei Nivellements, die am Morgen oder gegen Abend ausgeführt werden, der systematische[22]) Fehlereinfluss der Refraktion am stärksten wirksam wird, während im Laufe des Tages, selbst bei starkem Flimmern der Bilder keine oder nur sehr geringe Refraktionsfehler sich bemerkbar machen würden. Demgegenüber ergibt sich aus den vorliegenden Beobachtungen, dass gerade mit dem Eintreten des Flimmerns am Vormittag auch die Refraktionseinflüsse bedeutendere werden; doch kommen dieselben praktisch insofern nur in untergeordnetem Masse zur Geltung, als man bei einigermassen stärker auftretendem Zittern der Luft, wenigstens bei Feinnivellements, die Arbeit auszusetzen bezw. die Zielweiten zu verkürzen pflegt.

Einen weiteren wesentlichen Unterschied zwischen den beiden miteinander zu vergleichenden Refraktionsarten bildet dann, wie bei Betrachtung obiger Koeffiziententabellen sofort auffallen muss, die absolute Grösse der Refraktionswirkung. Bekanntermassen (Jordan a. a. O. S. 559) beträgt der mittlere Refraktionskoeffizient bei terrestrischer Strahlenbrechung für normale Luftbeschaffenheit: $k = \frac{R}{r} = 0{,}13$ bis 0,14, d. h. der Radius r der Lichtkurve ist für gewöhnliche Verhältnisse rund 7 oder 8 mal grösser als der mit ihm verglichene Erdradius.

Aber auch bei einem aussergewöhnlichen Luftzustand bleibt k stets unter 1; so ist, wie Christiansen[23]) in seinen „Bemerkungen über die terrestrische Refraktion" berichtet, der grösste bisher aus Beobachtungen abgeleitete Refraktionskoeffizient $k = 0{,}45$.[24]) Daraus folgt, dass bei der ter-

---

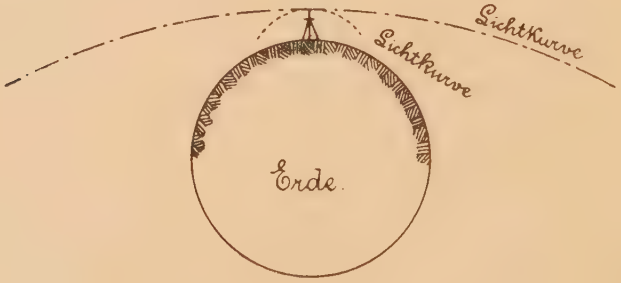
[22]) Wohl zu unterscheiden von der Aenderung bezw. den Schwankungen der Mittellage des Zielstrahls.

[23]) Vergl. Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1903, S. 311.

[24]) Nach Ambronn, „Beitrag zur Bestimmung der Refraktionskonstanten" im Archiv der deutschen Seewarte, Hamburg 1886, wurde allerdings am 12. Juni 1883 am Kingua Fjord ein Wert 0,81 für k aus Beobachtungen gefunden. Mit Rücksicht auf die Tatsache, dass der Refraktionseinfluss an und für sich bei Linien über grosse Wasserflächen sich bedeutend stärker bemerkbar macht gegenüber solchen auf dem Festland, ist diese Erscheinung wohl erklärlich.

restrischen Strahlenbrechung die Lichtkurve, wenn sie auch der Erde zustrebt, infolge ihrer gegenüber der Erdform schwächeren Krümmung doch niemals die Erdoberfläche erreichen wird.

Im Gegensatz hiezu weist die Refraktion im Nivellement wenigstens für den weitaus grössten Teil der Tageszeit bedeutend höhere Werte für k auf. Nach den Tabellen auf S. 84 u. 85, welche in der 2. Spalte für jede Zielweite das den einzelnen Tagesstunden entsprechende Vielfache des gewöhnlichen Refraktionskoeffizienten k enthalten, sind selbst am kalten Tag die Werte k nicht nur entschieden höher als der für terrestrische Strahlenbrechung normale Betrag 0,13, sondern in überwiegendem Masse sogar grösser als 1. Abgesehen von einigen in den Morgen- und Abendstunden der 3 Beobachtungstage vorkommenden Koeffizientenwerten unter 1 ist für die gesamte übrige



—·—·—·— terrestrische Strahlenbrechung
- - - - - - - - - - Refraktion im Nivellement.

Fig. 11.

Beobachtungszeit am Tage der Radius der Lichtkurve kleiner als der Erdradius. Es kehrt somit (s. Figur 11) ein Lichtstrahl, der von einem Punkt in geringer Höhe über der Erdoberfläche ausgeht und in den unmittelbar über der Bodenfläche liegenden Luftschichten verläuft, wieder zur Erde zurück. Damit aber diese Erscheinung bei der Strahlenbrechung der Luft überhaupt eintreten kann, muss, wie Christiansen a. a. O. S. 311 ausführt, eine Temperaturabnahme von über 10° pro 100 m Höhenunterschied stattfinden. Eine Temperaturänderung von solcher Grösse konnte jedoch noch nirgends nachgewiesen werden, weshalb auch bisher in keinem Falle ein Refraktionskoef-

fizient grösser als 1 zu finden war. Nach Hann[25]) beträgt das aus zahlreichen meteorologischen Beobachtungen in Deutschland abgeleitete Jahresmittel für die Abnahme der Lufttemperatur pro 100 m Höhenunterschied nur 0,54°, und in seinem Lehrbuch der Meteorologie 1906 S. 62 schreibt derselbe Autor: „In wärmeren Jahreszeiten erreicht oder überschreitet die vertikale Temperaturabnahme bei Tag in den unteren Schichten 1° für 100 m."

Im Gegensatz zu diesen Angaben von Hann ist aber nach den vorstehenden Beobachtungen eine Temperaturabnahme $n = 10°$ für 100 m oder 0,1° pro 1 m in den unmittelbar über dem Boden befindlichen Luftschichten tatsächlich vorhanden. Und während für den bei der terrestrischen Strahlenbrechung gültigen Maximalwert von $k = 0{,}45$ (auf S. 87 erwähnt) ein grösstes n zu 3,4° pro 100 m, somit nur 0,03° für 1 m, beobachtet wurde, ergab sich bei den ausgeführten Refraktionsbeobachtungen als höchstes Temperaturgefälle vom Boden bis in 1 m Höhe der Wert n zu rund 2°.[26]) Diese für das Nivellement in direkter Bodennähe zutreffende Wärmeänderung n würde daher die in grösseren Höhen über der Bodenfläche beobachteten maximalen Temperaturgradienten n um beinahe das 60 fache übersteigen.

Somit ist hinsichtlich der auftretenden Wärmeänderung zwischen den beiden Refraktionsarten ein wesentlicher Unterschied vorhanden, und es erscheint daher unzulässig, die für terrestrische Strahlenbrechung gültige Formel:

$$k = 0{,}2325 \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{1}{(1 + \alpha t)^2} \cdot (1 - 29{,}39\, n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8]$$

die nach Jordan II, S. 585 aber auch nur für kleine geodätische Bögen Gültigkeit hat, auf die Refraktion im Nivellement zu übertragen.

In diesem Jordan'schen Formelausdruck 8], welcher die Beziehung des Refraktionskoeffizienten k zur Wärmeabnahme n darstellt und nach den Untersuchungen von Hartl (a. a. O. S. 135) in sehr befriedigender Weise den tatsächlichen Verhältnissen bei der terrestrischen Refraktion entspricht, würde

---

[25]) Zitat aus Jordan, II., S. 591, Jahrgang 1904.

[26]) Als teilweise Bestätigung dieser grossen Werte n sei auf die Ergebnisse der in Tiflis 1895 in ca. 3 m über dem Boden ausgeführten, umfangreichen Temperaturbeobachtungen hingewiesen, worüber Hann in seinem schon erwähnten Lehrbuch S. 54 folgendermassen berichtet:

„Bei Nacht ist die Lufttemperatur in 3 m Erhebung höher als die Bodentemperatur und zwar um 1—2° im Winter, weniger im Sommer. Bei Tag aber ist der Boden sehr bedeutend wärmer als die Luft, im Winter wie im Sommer. Im letzteren beträgt die Differenz etwa 2—3 mal so viel als im Winter. Das Tagesmittel der Bodentemperatur ist höher als das der Luft, besonders im Sommer. Das Temperaturminimum tritt Winter und Sommer in den unteren Luftschichten und am Erdboden gleichzeitig ein, das Maximum aber verspätet sich in der Luft um 1—1½ Stunden gegen jenes der Bodentemperatur." Bezüglich letzterer Tatsache vergl. S. 23 u. S. 73.

die Wärmeabnahme $= 0$ werden, wenn k einen Wert von ca. 0,21 erreicht hat. Grössere Refraktionseinflüsse setzen dagegen, wie Hartl schon bemerkt, bereits eine Wärmezunahme mit der Höhe voraus.

Welches Verhalten weist nun in dieser Beziehung die Refraktion im Nivellement auf? Trotzdem hier fast durchwegs wesentlich höhere Refraktionskoeffizienten als 0,21 aus den Beobachtungen abgeleitet wurden, zeigten die angestellten Temperaturmessungen, dass beinahe den ganzen Tag über eine Temperaturabnahme nach oben hin stattfand. Oder, um diese weitere Unstimmigkeit zwischen den beiden Refraktionsarten anders auszudrücken: Wollte man die beobachteten Temperaturgradienten n, deren Werte sich in den durchschnittlichen Grenzen von rund $-(1^0—2^0)$ bis $+(2^0—3^0)$ bewegen, in die Formel 8] einsetzen, so müssten sich gemäss des Klammerausdrucks dieser Jordan'schen Formel: $(1—29{,}39\,n)$ alle jene Werte für k negativ ergeben, welche Gradienten: $+n > 0.03^0$ entsprechen. Da aber, abgesehen von wenigen Ausnahmefällen am Morgen, für den ganzen Tag und meistenteils auch für den Abend noch positive n von stets grösserem Werte als $0{,}03^0$ beobachtet und hiefür gleichzeitig stets positive Koeffizienten k gefunden wurden, so ist hiedurch ein wesentlicher Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnungsergebnis nach Formel 8] bedingt.

Diese Unstimmigkeit wird auch bestätigt bei Verwendung der am Morgen stattfindenden, ausnahmsweise negativen Temperaturgradienten n und zwar insoferne, als die hieraus berechneten k nicht nur das positive Vorzeichen erhielten, sondern auch Werte bis zu 10 Einheiten und darüber annehmen würden, während doch Formel 8] nur die für terrestrische Strahlenbrechung gültigen Grössen k zu 0,13—0,20 ergeben soll.

Somit ist der Nachweis geliefert, dass die Formel 8] unmöglich für die beobachtete Refraktion im Nivellement in Betracht kommen kann.

Immerhin lässt sich aber auch bei der Refraktion im Nivellement ein deutlicher, gesetzmässiger Zusammenhang zwischen Refraktionsfehler und Temperaturgradient bezw. der Temperatur selber erkennen, wie nachstehende Betrachtung ergibt:

In der folgenden Zusammenstellung sind für die Beobachtungsreihe des 1. Beobachtungstages die mittleren Temperaturen t, die mittleren Temperaturgradienten n und die beobachteten, mittleren Refraktionsfehler f angegeben, wobei diese Grössen nach den einzelnen Zielweiten von 40—100 m ausgeschieden wurden. Während hiezu die Werte t und f durch

die Mittelbildung aus den auf S. 19 bis 21 angeführten Beobachtungsergebnissen abgeleitet sind, wurden die Grössen n erst durch eine besondere Mittelung des Temperaturgefälles vom Boden bis in 1 m Höhe $= n_1$ und jenes vom Boden bis in 2 m Höhe $= n_2$ bestimmt. Unter Berücksichtigung der Vorzeichen von n_1 und n_2 ergibt sich dann für den mittleren Wert n die einfache Beziehung: $n = \frac{n_1 + \frac{n_2}{2}}{2}$. Auf diese Weise findet neben der Berücksichtigung des ausschlaggebenden n_1 eine, wenn auch nur teilweise Verwertung des n_2 für die Ermittelung des Gesamttemperaturgradienten n statt.

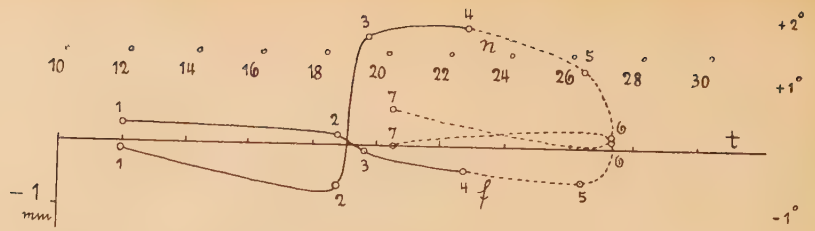
1. Tag.

Beobachtungs-Zeit	40 m Zielweite			60 m Zielweite			80 m Zielweite			100 m Zielweite		
	t⁰	n⁰	f mm	t⁰	n⁰	f mm	t⁰	n⁰	f mm	t⁰	n⁰	f mm
5 Uhr morgens	12.0	−0.1	+0.3	11.7	−0.1	+0.3	11.5	+0.15	0	11.4	+0.1	+0.1
7 „ morgens	18.7	−0.6	+0.1	18.8	−0.9	0	18.8	−0.7	−0.4	19.0	−0.4	−1.2
8½ „ vorm.	19.6	+1.7	−0.1	19.7	+1.85	−1.0	19 8	+1.45	−2.3	19.2	+1.55	−3.2
10½ „ vorm.	22.7	+1.9	−0.4	23.0	+1.55	−0.7	23.1	+2 05	−2.9	23.3	+2.05	−4.7
1 „ mittags	26.3	+1.2	−0.5	26.6	+0.5	−1.2	26.5	+0.2	−3.2	26.2	+0.8	−4.6
3 „ nachm.	27.2	+0.15	+0.1	27.0	−0.5	−0.7	26.7	− 0.4	−2.0	26.8	−0 3	−3 8
6 „ nachm.	20.4	+0.55	0	20.5	+0.65	−0.1	20.5	+0.7	+0.2	20.4	+0.3	+0.3

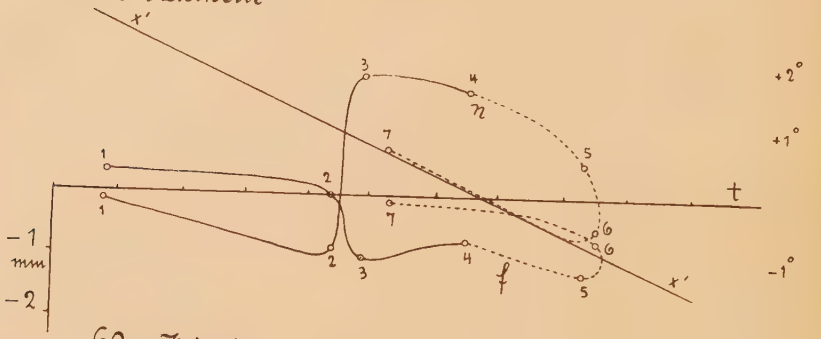
Zur Veranschaulichung der zwischen den vorstehenden Grössen t, n und f stattfindenden Beziehungen ist wieder die Darstellung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gewählt.

Als dessen Abszissen kommen die im Laufe des Tages auftretenden Temperaturen von 11,4⁰ bis 27,2⁰ in Betracht, während die Ordinaten die oben aufgeführten Werte von n und f darstellen. Durch Verbindung der dabei für die einzelnen Beobachtungszeiten erhaltenen Punkte (Punkt 1 für 5 Uhr, Punkt 2 für 7 Uhr usw.) ergeben sich bei den 4 verschiedenen Zielweiten für die n und f die auf S. 92 gezeichneten Kurven.

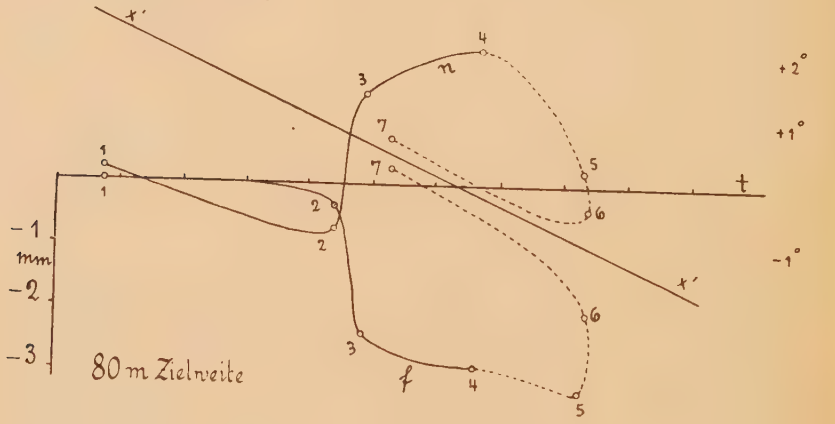
Bei Betrachtung derselben fällt auf, dass die Kurve der Refraktionsfehler f gegenüber jener der Temperaturgradienten n eine nahezu symmetrische Form besitzt, was sowohl für die Vormittagsbeobachtungen (Kurvenzweig 1—4) als für die Nachmittagsbeobachtungen (Kurvenzweig 4—7) zutrifft. Je grösser die n werden, um so mehr wachsen im allgemeinen auch die Refraktionsfehler und umgekehrt. Die eine der beiden Kurven kann daher als ungefähres



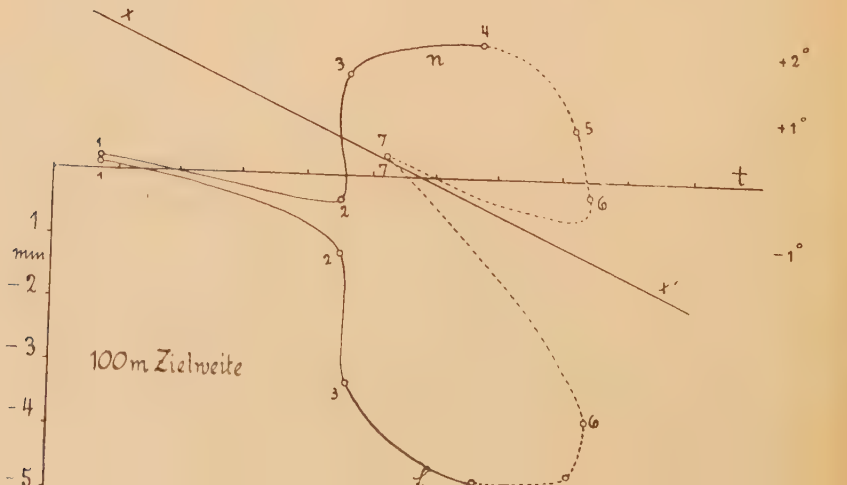
40m Zielweite



60 m Zielweite



80 m Zielweite



100m Zielweite

Spiegelbild der anderen betrachtet werden, wobei aber die Symmetrieachse nicht mit der Abszissenlinie zusammenfällt, sondern gegen dieselbe geneigt ist. Dies mag neben der völligen Ausserachtlassung der Verschiedenheit in den einzelnen Höhenunterschieden und Zielhöhen darin begründet sein, dass, wie auf S. 89 Anmerkung 26 ausgeführt, das Temperaturmaximum in der Luft sich gegenüber der höchsten Bodentemperatur um 1—2 Stunden verspätet. Denkt man sich dagegen die x-Achse durch Drehung um den bei allen 3 Zielweiten 60, 80 und 100 m (40 m Entfernung wurde hier wegen zu geringer Grösse des Refraktionsfehlers ausgeschieden) annähernd gleichen Winkel α in die Lage der Symmetriegeraden $x'x'$ gebracht, so wird analog der in Abschnitt II konstatierten Tatsache (d. i. einer symmetrischen Beziehung zwischen Refraktionsfehler und Tagestemperatur) hier als weiteres Beobachtungsergebnis erhalten:

Das Verhältnis der Refraktionsfehler f nunmehr zu den Temperaturgradienten n lässt sich durch einen allgemeinen Näherungsausdruck: $y = a - k \cdot F(t)$ zur Darstellung bringen, wobei a und k wieder Konstante sind und F(t) die Beziehung zwischen Temperatur und Temperaturgradient bedeutet. Somit kann der Näherungsausdruck noch eine allgemeinere Form erhalten, nämlich:

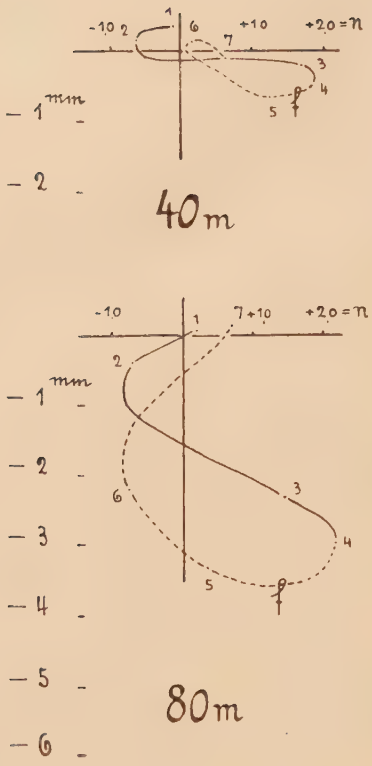
$$y = F(t, n),$$

was besagt, dass abgesehen von der Beobachtungszeit (s. Abschnitt II) und der Zielhöhe (s. Abschnitt IV) die Refraktionswirkung durch die variablen Grössen t und n bedingt wird.

Betrachtet man nunmehr in nebenstehender graphischer Darstellung unter völliger Ausscheidung der Temperatur t, lediglich die Gradientenkurve im Zusammenhang mit der Fehlerkurve, so erhält man entsprechend den 4 Zielweiten die auf der nächsten Seite (94) konstruierten, weiteren 4 Kurven.

Bei diesen letzteren ist wieder, besonders für die grösseren Zielweiten 80 und 100 m deutlich eine Symmetrie zwischen den die Vormittagsbeobachtungen 1—4 und die Nachmittagsbeobachtungen 4—7 darstellenden Kurvenzweigen wahrzunehmen.

Im Anschlus hieran interessiert es schliesslich, unter Bezugnahme auf die nur für terrestrische Strahlenbrechung gültige Formel Nr. 8] den Zusammenhang zwischen k, n und t auch für nivellitische Refraktion zur Darstellung zu bringen. Zu diesem Zwecke werden einerseits die auf S. 84 u. 85 aufgeführten Refraktionskoeffizienten k als Abszissen und andererseits sowohl die entsprechenden Temperaturen t wie auch die Gradienten n als Or-

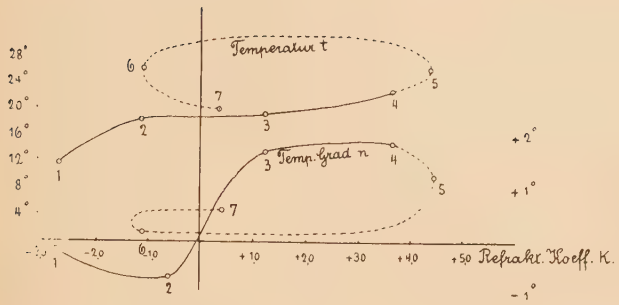


dinaten eines Koordinatensystems aufgetragen und dabei unter Ausscheidung nach den Zielweiten die Kurven auf S. 95 erhalten.

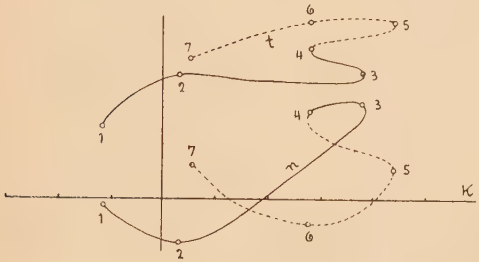
Naturgemäss müssen hier die der Abszissenachse zunächst benachbarten Kurven, welche die zwischen k und n bestehenden Beziehungen veranschaulichen, wieder eine ähnliche Form wie die soeben vorausgehenden Kurven besitzen, wenngleich sie infolge einer anderen Anordnung um -90^{g} gedreht sind.

Die Notwendigkeit für dieselbe Form ergibt sich aus der Symmetrie der Funktion F (k, n) zu der obigen Beziehung F (f, n).

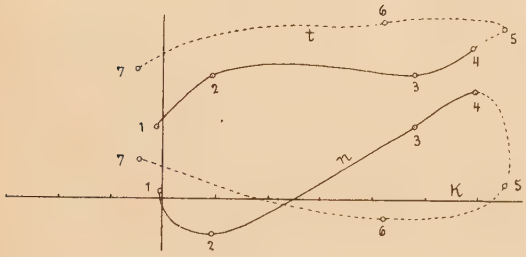
Während in dem auf S. 95 dargestellten Kurvenverlauf die Beziehungen zwischen k und t im allgemeinen eine gewisse Gesetzmässigkeit aufweisen, ist dies für die der Funktion F (k, n) entsprechenden Kurven auf gleicher Seite weniger zutreffend. Die Ableitung einer diesbezüglichen Näherungsformel, die der für terrestrische Refraktion gültigen Formel Nr. 8] entsprechen würde,



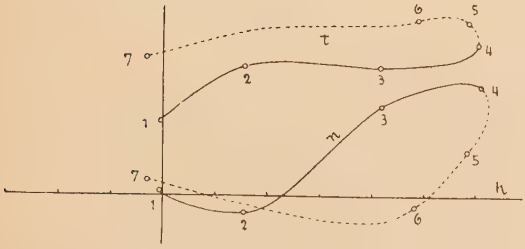
40m Zielweite



60m Zielweite



80m Zielweite



100m Zielweite

ist daher bei dem hiefür unzureichenden Beobachtungsmaterial nicht möglich und zwar um so mehr, als die gleiche Beziehung F (k, n) für den 2.Beobachtungstag (= warmer Tag) von der für den 1. Tag zutreffenden Kurvenform im Verlauf abweicht. Ehe dieser letztere zur Darstellung gelangt, sollen die für diesen 2. Tag beobachteten mittleren Werte der t, n und f angefügt werden.

2. Tag.

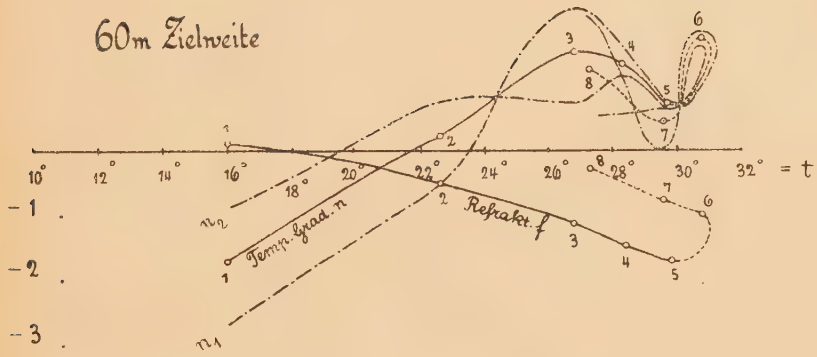
Beobachtungs-Zeit	60 m Zielweite			80 m Zielweite			100 m Zielweite		
	t°	n°	f mm	t°	n°	f mm	t°	n°	f mm
7 Uhr morgens	16.0	—1.7	+0.1	17.0	—1.8	—0.7	19.3	—2.0	—2.4
8½ „ vorm.	22.5	+0.1	—0.5	23.2	+0.5	—1.2	23.7	+0.9	—2.9
10 „ vorm.	26.9	+1.5	—1.1	27.1	+1.2	—2.3	27.5	+1.3	—4.2
11½ „ vorm.	28.2	+1.4	—1.5	27.8	+0.3	—2.6	28.5	+0.5	—4.2
1 „ nachm.	29.8	+0.7	—1.7	30.5	+0.7	—2.6	30.5	+1.3	—4.3
2½ „ nachm.	30.7	+1.7	—1.0	30.6	+1.5	—1.5	30.0	+1.2	—2.4
4 „ nachm.	29.5	+0.4	—0.8	29.8	+1.3	—1.2	28.6	—0.1	—2.0
5½ „ nachm.	27.2	+1.3	—0.3	26.4	+1.8	—0.3	24.4	+0.8	—0.3

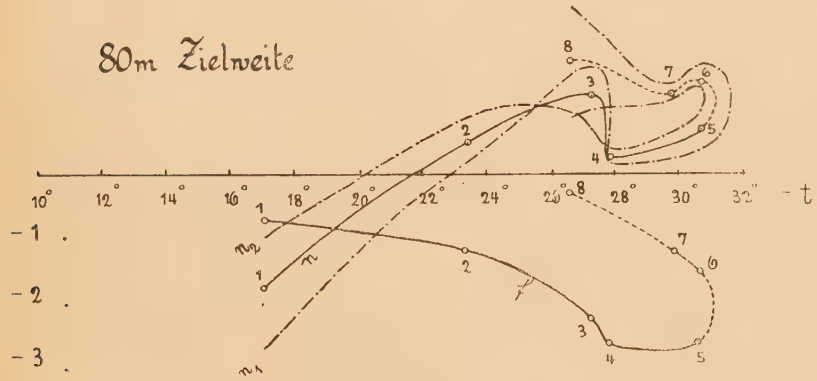
Aus diesen Beobachtungsergebnissen wurden analog wie auf S. 92 die für die 3 Zielweiten entsprechenden Funktionen F (t, f) und F (t, n graphisch dargestellt.

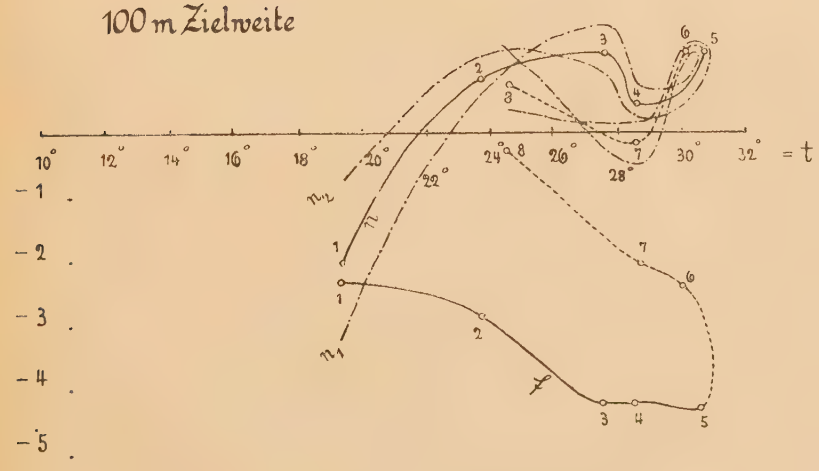
Wie man aus dem Kurvenverlauf auf nächster Seite sieht, besitzen entsprechend dem Kurvenverlauf des 1. Tages auch hier die Fehlerkurven eine zu den Gradientenkurven ungefähr symmetrische Form. Der Veranschaulichung wegen sind hier auch die den n_1 und $\frac{n_2}{2}$, also den vom Boden bis in 1 m und 2 m Höhe beobachteten, mittleren Temperaturabnahmen, entsprechenden Nebenkurven aufgetragen, wobei es vorkommt, dass bisweilen eine solche Nebenkurve noch mehr als die Hauptkurve für n einen zur Fehlerlinie symmetrischen Verlauf zeigt.

In gleicher Weise erfolgt dann auch die Darstellung der Beziehungen zwischen Refraktionskoeffizient k, Temperatur t und Gradient n, während die analoge, übrigens nichts Neues aussagende Funktion F (f, n) hier nicht mehr zum Ausdruck gebracht wurde.

Unter diesen Kurven (siehe S. 90) besitzen jene für F (k, t) nicht nur für die drei zusammengehörigen Zielweiten desselben Tages die gleiche Grundform, sondern letztere stimmt auch ziemlich gut mit den entsprechenden Kurven des 1. Beobachtungstages auf S. 95 überein, was daraus erklärlich ist, dass der Unterschied der Maximaltemperatur an diesen beiden Tagen


60m Zielweite
10° 12° 14° 16° 18° 20° 22° 24° 26° 28° 30° 32° = t
−1
−2
−3
n_2
n_1
Temp. grad. n
Refrakt. f


80m Zielweite
10° 12° 14° 16° 18° 20° 22° 24° 26° 28° 30° 32° = t
−1
−2
−3
n_2
n_1
n
f


100 m Zielweite
10° 12° 14° 16° 18° 20° 22° 24° 26° 28° 30° 32° = t
−1
−2
−3
−4
−5
n_2
n_1
n
f

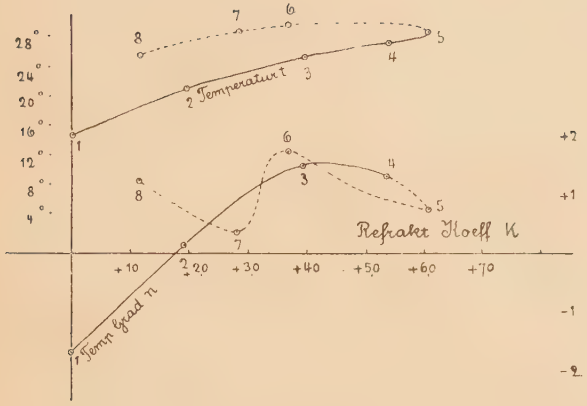
nur 3°—4° beträgt. Dagegen ist für den Verlauf der Kurven F(k, n), welche zwar bei den Zielweiten jedes einzelnen Tages annähernd die gleiche Form aufweisen, eine Uebereinstimmung für beide Tage nur in verhältnismässig geringem Masse vorhanden. Die Ursache hiefür dürfte, abgesehen von dem schon konstatierten Temperaturunterschied darin liegen, dass die für den 1. Beobachtungstag verwendeten Grössen k und n bei jeder Beobachtungsreihe aus nur zweimaligen Bestimmungen hervorgegangen sind, während dieselben Grössen k und n des 2. Beobachtungstages als Mittel aus 8, also 4 mal sovielen Werten erhalten wurden.

Somit war es auch unvermeidlich, bei der Berechnung der f und damit der k des 2. Tages die Einflüsse der verschiedenen Zielhöhen in noch grösserem Masse zu vernachlässigen, als solches bei der Ermittlung der k des 1. Tages geschehen ist.

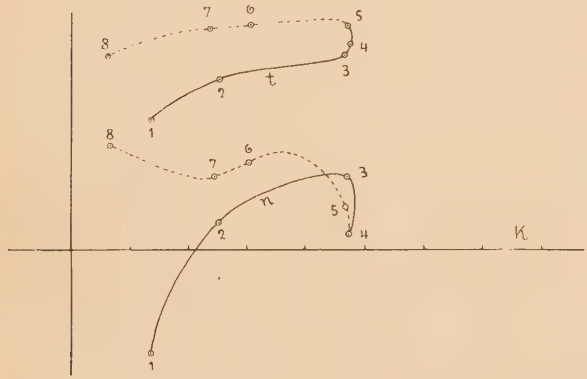
Aus den Kurvendarstellungen der beiden Tage geht deutlich hervor, dass auch bei der Refraktion im Nivellement gewisse Beziehungen zwischen dem Refraktionskoeffizienten k und dem Gradienten n bestehen, wenngleich sich dieselben keineswegs nach der für terrestrische Refraktion gültigen Formel 8] darstellen lassen. Die Ursache hiefür bildet, abgesehen von den total verschiedenen Grössen der k und n die Tatsache, dass bei der Refraktion im Nivellement die Temperatur t zweifelsohne eine grosse Rolle spielt, ja gemäss der auf S. 92—97 dargestellten Kurven ein gewisses Bindeglied zwischen f und n und damit auch zwischen k und n bedeutet. Bei der terrestrischen Refraktion dagegen bleibt die Temperatur, wenigstens nach der Formel 8] zu schliessen, ohne wesentlichen Einfluss.

Analog wie für die zwei bisher beobachteten Tage mit hohen Temperaturen hätte die gleiche Untersuchung über die Beziehungen der t, n, f und k auch für den 3. = kalten Tag angestellt werden können. Dieselbe unterbleibt jedoch hier mit Rücksicht darauf, dass die an diesem letzteren Tag beobachteten Bestimmungsgrössen der Refraktion in nur geringem Mass sich voneinander unterscheiden, daher auch eine nur wenig ausgeprägte Gesetzmässigkeit in den einzelnen betrachteten Funktionen bedingen können.

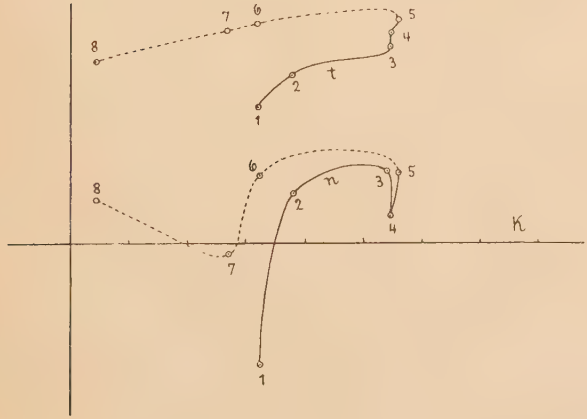
Durch diese Ausführungen dürfte also bewiesen sein, dass tatsächlich zwischen der terrestrischen Strahlenbrechung und der Refraktion im Nivellement wesentliche Unterschiede bestehen, die in den bisherigen Refraktionsformeln nicht oder nur in völlig ungenügender Weise zum Ausdruck gelangen. Diese Unterschiede sind übrigens insofern auch ohne weiteres plausibel, als man es bei der für die trigonometrische Höhenmessung in Betracht kom-



60 m Zielweite



80 m Zielweite



100 m Zielweite

menden terrestrischen Strahlenbrechung in der Regel mit langen und meist höhere Luftschichten durchdringenden Visuren zu tun hat, während bei Nivellements verhältnismässig nur sehr kurze und zudem in unmittelbarer Bodennähe verlaufende Zielungen stattfinden.

In diesem Zusammenhang sei noch kurz darauf hingewiesen, was Hartl bereits 1881 als massgebende Ursache für das Auftreten der Refraktion angegeben hat. In der Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, XVI. Bd., 1881, S. 129, führt er aus, dass die Temperatur an und für sich nicht der massgebende, meteorologische Faktor für die Grösse der Refraktion sein kann, ebensowenig wie dies für die Feuchtigkeit und den Luftdruck zutrifft; auch für die Windrichtung und Windstärke liess sich wenigstens aus den seiner Untersuchung zu Grunde liegenden Beobachtungen keine wesentliche Beeinflussung der Refraktion erkennen. Dagegen ist die Abnahme der Temperatur mit der Höhe für die terrestrische Refraktion von grosser Bedeutung. Die hiefür gültigen Beziehungen lassen sich zusammenfassen in: Je rascher die Temperatur mit der Höhe abnimmt, desto kleiner ist die Refraktion; umgekehrt findet bei geringer Wärmeabnahme eine stärkere Strahlenbrechung statt. Auf Grund dieses Untersuchungsergebnisses gelangt Hartl zu dem Schlusse, dass die Temperaturabnahme mit der Höhe als der wesentlichste Faktor in der täglichen und auch in der jährlichen Periode der terrestrischen Refraktion betrachtet werden muss.

Bei den vorliegenden Refraktionsbeobachtungen dagegen wurde deutlich aus dem für die beiden Beobachtungstage in Betracht kommenden Kurvenverlauf gefunden, dass einer stärkeren Temperaturabnahme auch ein grösserer Refraktionsfehler entspricht und umgekehrt. Dies trifft besonders unter der Voraussetzung zu, dass sowohl die Temperaturgradienten n als auch die Refraktionsfehler f bei ihrer graphischen Darstellung auf die gleiche vermittelnde Grösse, nämlich die Temperatur, bezogen werden.

Schaltet man jedoch letztere aus, und bringt die Grössen n und f bezw. n und k in direkte Beziehung, so lässt sich aus den diesbezüglichen Kurvenformen auf S. 95 u. 99 kaum mehr eine einfache Gesetzmässigkeit erkennen; ohne weitere Beobachtungen ist es somit nicht möglich, über den unmittelbaren Zusammenhang zwischen der Temperaturabnahme mit der Höhe und der Refraktionsgrösse sichere Schlüsse zu ziehen.

VI. Schluss.

Um nunmehr in zusammenfassender Form nochmals auf die ausgeführten Refraktionsbeobachtungen und die daran geknüpften Betrachtungen, die zur Aufklärung des systematischen Nivellierfehlers beitragen sollen, zurückzukommen, sei folgendes bemerkt:

Ausser der Grösse der Refraktionswirkung wurden die verschiedenartigen Beziehungen derselben zu: Tageszeit, Temperatur und Temperaturgradient ermittelt und versucht, ihre Abhängigkeit von Zielweite, Zielhöhe und Höhenunterschied zu bestimmen. Dabei ergab sich, dass im Gegensatz zu der bisher noch vielfach bestehenden Anschauung in mancher Hinsicht ein wesentlicher Unterschied zwischen der allgemeinen terrestrischen Strahlenbrechung in der freien Atmosphäre und jener in der unmittelbaren Nähe der Bodenfläche vorhanden ist. Die Aufstellung von Näherungsformeln musste allerdings mit Rücksicht auf die so verwickelten Beziehungen zwischen den beobachteten Refraktionserscheinungen und den sie bedingenden Ursachen unterbleiben, da zu deren völligen Klarstellung das vorhandene Beobachtungsmaterial nicht ausreicht. Uebrigens kommt selbst Helmert[27]) bei der Diskussion der Höhenbestimmungen Schillig—Wangeroog und Cuxhafen—Neuwerk sowie der Koß'schen Kimmtiefenbeobachtungen zu dem Ergebnis, „dass in den untersten Luftschichten — etwa 3 m über dem Wasser — eine Darstellung der Refraktion durch eine Formel wohl unmöglich sein dürfte".

Dieses Urteil mag zum Teil auch für die Refraktionsverhältnisse in den untersten Luftschichten über festem Boden Gültigkeit haben. Auf Grund des bisher bereits erkannten, gesetzmässigen Verhaltens des Refraktionseinflusses im Nivellement wird jedoch die Annahme wohl berechtigt sein, dass durch ein weiteres, entsprechend umfangreiches Beobachtungsmaterial die Gesetze für diese Refraktionswirkung noch klarer bestimmt und wenigstens näherungsweise durch mathematische Ausdrücke wiedergegeben werden könnten.

Schliesslich bringe ich dem Vorstand des Geodätischen Instituts der K. Technischen Hochschule München, Herrn Professor Dr. Max Schmidt, für die wertvolle Förderung vorstehender Arbeit sowie für die gütige Ueberlassung der benützten Instrumente meinen aufrichtigsten Dank zum Ausdruck. Gleichzeitig danke ich meinem Kollegen, Herrn Assistenten Otto Schäfer, für seine freundliche Mitwirkung bei den Feldbeobachtungen.

---

[27]) Sitzungsberichte der preuß. Akademie der Wiss., 1908, S. 511.

Verzeichnis der benützten Literatur.

Christiansen, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1903.

Hann, Lehrbuch der Meteorologie, 1906.

Hartl, Mitteilungen des k. k. militärgeographischen Instituts 1883, 1884.

Helmert, Höhere Geodäsie, II. Teil: Die physikalischen Theorien, 1884.

Hugershoff, Doktordissertation der Techn. Hochschule Dresden, 1907.

Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, II. Bd.

Lallemand, Erdmessungsbericht, 1897.

Schmidt, Ergänzungsmessungen zum bayer. Präzisionsnivellement, 1908.

Walter, Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung.

Wild, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1909.

Zeitschrift für Vermessungswesen, 1908.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, 1881.